Métodos Cuantitativos

Métodos Cuantitativos

GUÍA DIDÁCTICA Y MÓDULO

CARLOS MARIO MORALES CASTAÑO

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LUIS AMIGÓ

FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS, ECONÓMICAS Y CONTABLES

Colombia, 2008

Métodos Cuantitativos
Carlos Mario Morales Castaño

Decana Facultad de Ciencias Administrativas, Económicas y contables:
María victoria Agudelo Vargas

Corrección de estilo:

Diseño:
Colectivo Docente Facultad de Ciencias Administrativas, Económicas y Contables

Impresión:
Departamento de Publicaciones FUNLAM

www.funlam.edu.co

Medellín – Colombia
2008

CONTENIDO

PRIMERA PARTE: PROTOCOLO ACADÉMICO

SEGUNDA PARTE: MÓDULO

UNIDAD I

UNIDAD II

PROGRAMACIÓN LINEAL

UNIDAD III

TEORÍA DE LINEAS DE ESPERA

UNIDAD IV

TEORÍA DE DECISIONES

Protocolo Académico

PRESENTACIÓN

Bienvenidos al curso Algebra Lineal y Métodos Cuantitativos del programa de Administración de Empresas con énfasis en Economía Solidaria de la Fundación Universitaria Luís Amigó.

La metodología a distancia permite involucrar en los procesos de enseñanza-aprendizaje a las personas que por razones geográficas, laborales o de otra índole no puede beneficiarse de los programas educativos presenciales; para esto la institución pone todos los medios necesarios para facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes que escogen esta modalidad.

El presente modulo, el cual hace parte de esos medios, ha sido escrito pensando en los estudiantes de la metodología a distancia, el cual más que un texto sobre la materia; es un medio que facilita la comunicación de los estudiantes con los asesores; es una guía de estudio y trabajo que incluye: intencionalidades formativas, metodología general, sistema de evaluación; bibliografía, glosario, preguntas frecuentes y las unidades de aprendizaje, las cuales, además de los conceptos básicos propios de cada tema, contiene: objetivos de la unidad y las actividades de reconocimiento y profundización.

De otro lado, el modelo exige que el estudiante sea el protagonista de su propia formación, es él quien, a través de su esfuerzo y perseverancia, va alcanzando los logros que en conjunto significan su aprendizaje. El carácter autoformativo de los materiales educativos guarda, de forma implícita, la labor del estudiante; su aprendizaje es en gran parte autónomo y autorregulado. Es autónomo debido a que él es quien desarrolla las diferentes actividades, tareas y lecturas de cada sección que comprende la asignatura; es autorregulado, debido a que él es quien marca su propio ritmo de aprendizaje según sus posibilidades de tiempo, distribuyendo la carga de trabajo a lo largo del tiempo a fin de poder culminar el total de actividades dentro de los plazos previstos.

De esta forma, la educación a distancia, además de generar un cambio en los conocimientos, habilidades destrezas y valores de los educandos, también contribuye al desarrollo de técnicas de estudio independiente o grupal.

Seguros de que el material que se presenta en el modulo se encuentran todos los referentes necesarios para el desarrollo de un proceso de aprendizaje con calidad; los invitamos a comprometerse con esta nueva etapa de su formación profesional.

1. IDENTIFICACIÓN

CURSO	Métodos Cuantitativos
AUTOR	Carlos Mario Morales Castaño
INSTITUCIÓN	Fundación Universitaria Luis Amigó
UNIDAD ACADÉMICA	Facultad De Ciencias Administrativas, Económicas Y Contables
PROGRAMA	Administración De Empresas
PALABRAS CLAVE	Investigación, Operaciones, Matemáticas, Toma De Decisiones
ÁREA DE CONOCIMIENTO	Básica
CRÉDITOS	3 (Tres)
CIUDAD	MEDELLÍN, Colombia
FECHA	Noviembre de 2008
ACTUALIZACIÓN	Noviembre de 2008
ADICIÓN DE TEMAS	
APROBADA POR:	

2. INTENCIONALIDADES FORMATIVAS

2.1 Objetivo general

Fundamentar al estudiante en la comprensión, modelación y resolución de los problemas relacionados con las ciencias de la administración en las áreas básicas de la empresa: producción, recursos humanos, contabilidad y finanzas, mercadeo y gerencia; propiciando el desarrollo de la capacidad analítica para la toma racional de decisiones.

2.2 Objetivos Específicos

- Comprender y clasificar los problemas empresariales a los cuales se ven enfrentados los administradores en el día a día.
- Modelar y resolver problemas empresariales que conducen a sistemas de ecuaciones lineales. E Interpretar las soluciones como base para la toma de decisiones que asignan los recursos en la empresa.
- Modelar y resolver problemas empresariales que conducen a modelos de programación lineal. E Interpretar las soluciones para apoyar la toma de decisiones que asignan recursos en la empresa.
- Modelar y caracterizar problemas empresariales a través del modelo de líneas de espera.
- Realizar análisis de sensibilidad y de costos de los modelos de línea de espera como complemento a la caracterización de dichos modelos.
- Interpretar las características de los modelos de líneas de espera y tomar decisiones con base en estas interpretaciones.
- Comprender e identificar la aplicación de los diferentes modelos de la teoría de decisión, como ayuda al proceso de asignación de los recursos escasos en las empresas.

3. UNIDADES TEMÁTICAS

- **UNIDAD 1**

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Se tratan los conceptos básicos del Algebra Lineal; para ello la unidad se divide en tres capítulos, en el primero se estudian los sistemas lineales y su aplicación a los problemas empresariales; en el segundo se analiza la teoría general de matrices y en el tercero la aplicación de las matrices en el manejo y solución de los sistemas lineales.

- **UNIDAD 2**

PROGRAMACIÓN LINEAL

Se estudian las técnicas y procedimientos de solución de problemas que tienen que ver con la asignación de los recursos en la empresa. En particular, la representación de los problemas empresariales a través del modelo de Programación Lineal del cual se analiza la solución grafica y analítica -método simplex-.

- **UNIDAD 3**

TEORÍA DE LÍNEAS DE ESPERA.

Se estudia el problema empresarial de atención a los clientes a través de los modelos de líneas de espera; se hace la caracterización de los modelos de M/M/1, M/M/S, M/G/1, M/D/1; además se analiza la disyuntiva del administrador de menores costos versus mejor servicio.

- **UNIDAD 4**

TEORÍA DE DECISIONES

Se estudia el proceso de toma de decisiones y su importancia para el buen desempeño de las funciones administrativas y gerenciales; en especial se analizan los tipos de decisiones con y sin datos previos.

4. METODOLOGÍA GENERAL

Las asesorías buscaran incentivar el desarrollo de los procesos de pensamiento, la capacidad investigativa y creativa de los estudiantes; de manera práctica se fomentara que los conceptos trabajados sean aplicados a los problemas cotidianos; la investigación, la formulación y la solución de los problemas de las ciencias administrativas. Para lo anterior, se proponen las siguientes estrategias:

a. Seguimiento a los conceptos desarrollados en el modulo.
b. Seguimiento al instructivo propuesto en modulo
c. Solución de ejercicios prácticos a través del trabajo individual (actividades de profundización)
d. Solución de talleres en pequeños grupos de trabajo (actividades de profundización)
e. Solución de los distintos modelos matemáticos a través de la computadora (actividades de profundización)

5. EVALUACIÓN INTEGRAL

5.1 Sistema de evaluación

La evaluación se hará de manera integral y continua de acuerdo con la participación de los estudiantes en los trabajos que se propongan, ya sea de manera individual o en grupo. En general las evaluaciones seguirán las orientaciones establecidas en el reglamento estudiantil y de acuerdo con la programación presentada en el proyecto docente y constará básicamente de las siguientes actividades:

a. Realización individual de las tareas propuestas.
b. Solución de los talleres propuestos en pequeños grupos de trabajo.
c. Participación de los estudiantes en las clases y en los pequeños grupos de trabajo
d. Evaluaciones individuales
e. Reflexiones, correcciones y propuestas en el Portafolio Personal de Desempeño

La promoción y certificación, al finalizar el período académico, se realizarán con base en la siguiente tabla, según el artículo 80 del reglamento Estudiantil.

PARÁMETRO	VALORACIÓN CUALITATIVA	RANGOS CUANTITATIVOS
1	Cuando se logran los objetivos esenciales y complementarios y, además, los enriquece con sus aportes: **excelente**.	4.6 - 5.0
2	Cuando se logran los objetivos esenciales y complementarios satisfactoriamente: **sobresaliente**.	4.0 - 4.5
3	Cuando se logran los objetivos esenciales y algunos complementarios: **bueno**.	3.5 - 3.9
4	Cuando solo logra los objetivos esenciales: **aceptable**.	3.0 - 3.4
5	Cuando no logra los objetivos esenciales aunque demuestra esfuerzo e interés: **insuficiente**.	2.5 - 2.9
6	Cuando no logra los objetivos esenciales y, además, no demuestra interés ni motivación en el proceso: **deficiente**.	2.0 - 2.4
7	Cuando no logra los objetivos esenciales ni los complementarios y no demuestra interés ni motivación: **muy deficiente**.	1.0 - 1.9

5.2Actividades de reconocimiento y de profundización

Las actividades de reconocimiento y profundización se presentan al final del modulo para cada unidad.

Módulo

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos 40 años las matemáticas han aportado un sinnúmero de contribuciones a la teoría general de la administración, estas constan de modelos matemáticos capaces de conceptuar y proporcionar soluciones a los problemas en todas las áreas de la empresa –producción, mercadeo, talento humano, finanzas y la administración general-. Estas contribuciones están orientadas básicamente a brindar ayuda a los administradores en la toma racional de decisiones.

El módulo Métodos Cuantitativos tiene como propósito proveer los métodos, procedimientos, técnicas y herramientas matemáticas, relacionados con la modelación y solución racional de los problemas administrativos, que requieren los estudiantes del programa de Administración de Empresas para el estudio independiente. De esta forma, los estudiantes aprendan apropiadamente y exitosamente las técnicas para la toma de decisiones racional necesarias para su ejercicio profesional.

Considerando el objetivo del curso se omiten las demostraciones de proposiciones, teoremas y fórmulas, asumiendo estas como ciertas y aplicándolas a la solución de los problemas empresariales cuando sea necesario.

Temática

El curso en su primera parte incluye una introducción al Algebra Lineal la cual además de servir de introducción a la programación lineal, permite a través de la teoría de matrices y sistemas lineales, igualmente, tratar diversos problemas empresariales. El estudio de los sistemas lineales es importante debido a que un buen número de problemas de las ciencias naturales y sociales pueden ser representados por ecuaciones lineales, es decir, por relaciones proporcionales entre variables. La Teoría de Matrices, por su parte, además de permitir la solución de los modelos lineales, facilita el manejo ordenado y sistemático de un sinnúmero de datos que cada día se generan en la empresa.

En la segunda parte del curso se incluye la teoría de los métodos cuantitativos, la cual adopta el método científico para la solución de los problemas, dando mayor énfasis al juicio objetivo, que al juicio subjetivo. De esta forma, los métodos cuantitativos se identifican como la aplicación de métodos y técnicas científicas a los problemas operativos de las empresas de modo que provean a los ejecutivos soluciones óptimas y racionales.

En forma detallada el modulo esta compuesto por cuatro unidades de aprendizaje. En la primera de ellas se conceptualiza sobre los sistemas lineales revisando la estructura de los modelos de *n* ecuaciones, con *m* incógnitas; se estudia la solución grafica de los sistemas lineales de 2 dimensiones y el método de eliminación para la solución de los sistemas lineales en general. Además, se analiza la metodología para modelar algunos problemas empresariales a través de sistemas lineales. Además, se introduce la teoría general de matrices; en particular se analiza el concepto de matriz, se reconocen los diferentes elementos que la componen, se tipifican las matrices, se estudian las operaciones algebraicas básicas con matrices y las propiedades de dichas operaciones. Finalmente se estudia la solución de los sistemas lineales a través de las matrices, en especial se analiza la solución de los modelos lineales de *n* ecuaciones y *m* incógnitas a través de los métodos GAUSS-JORDAN, la matriz INVERSA y la ley de CRAMER.

En la segunda unidad se estudian los modelos de Programación Lineal, en particular se estudia la representación de algunos problemas empresariales a través del modelo, se analiza la solución grafica y la solución analítica -método simplex-.

La tercera unidad estudia el problema empresarial de atención a los clientes a través de los modelos de líneas de espera; se hace la caracterización de los modelos M/M/1, M/M/S, M/G/1, M/D/1; además se analiza la disyuntiva del administrador de menores costos versus mejor servicio.

Finalmente en la unidad cuarta se estudian el proceso de toma de decisiones y su importancia para el buen desempeño de las funciones administrativas y gerenciales; en especial se analizan los tipos de decisiones con y sin datos previos.

Ejemplos

En cada unidad se resuelven ejemplos que ilustran las diferentes técnicas que se exponen; los ejercicios se resuelven paso a paso con el fin de que no queden dudas en los algoritmos o procedimientos con los cuales se plantean o resuelven los modelos. De otro lado, al final en las actividades de profundización, se proponen ejercicios de diferentes dificultades con el fin de que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias que se proponen en cada unidad.

Referencias Bibliográficas

Al final del modulo se presenta la bibliografía especializada con la cual se pueden complementar o consultar los distintos temas tratados en las diferentes unidades.

JUSTIFICACIÓN

Los temas desarrollados en el modulo Introducción al Algebra Lineal y Métodos Cuantitativos son herramientas matemáticas usadas en el campo administrativo para soportar la toma racional de decisiones, función propia del que hacer del profesional de la administración de empresas. Entre otros asuntos, el profesional debe estar preparado para hacer buen uso y una asignación óptima de los recursos bajo su responsabilidad. El uso y asignación de recursos se puede hacer de varias maneras, de manera juiciosa a través de un análisis matemático o basado solo en la experiencia; aunque lo más práctico es que esta se haga combinando inteligentemente experiencia y rigor matemático.

Hasta hace algunos años, sin decir que hoy no suceda, la asignación de los recursos empresariales se hacia confiando solo en la experiencia del ejecutivo que se encontraba al frente de la organización. No obstante, hoy en día la dinámica de la economía, la competitividad de los mercados y la necesidad de empresas cada vez más productivas hacen que la asignación de recursos a las actividades empresariales, basada solo en la experiencia no sea una práctica aceptable. En el sector público, además, los administradores tienen la responsabilidad adicional de velar porque los recursos públicos no sean despilfarrados y sean utilizados en las mejores iniciativas que atiendan las necesidades sociales. El curso propone el análisis de los problemas administrativos desde la formalidad matemática, generando de esta forma un soporte científico investigativo, que ayude a formar profesionales con autonomía intelectual y capaz de afrontar los problemas cotidianos.

De esta forma, el módulo se justifica ya que su contenido brindara al estudiante de los elementos necesarios para abordar el aprendizaje de los métodos y técnicas para apoyar la toma racional de decisiones.

Unidad I

Introducción al Algebra Lineal

Capitulo 1
Sistemas Lineales

Contenido

Sistemas lineales
Solución de los Sistemas Lineales
- Método de Eliminación
- Método gráfico
- Otros métodos

Aplicación de los Sistemas lineales a los problemas administrativos

Objetivos

- Identificar la estructura de los sistemas lineales.
- Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos variables por el método de eliminación y el método gráfico.
- Plantear y resolver sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* variables e interpretar sus soluciones.
- Comprender e identificar diferentes tipos de problemas empresariales que se pueden modelar a través de sistemas lineales.
- Construir y solucionar modelos lineales a partir de problemas empresariales.

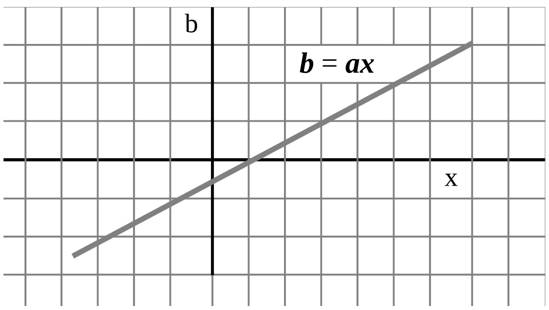
1. SISTEMAS LINEALES

Muchos problemas de las ciencias naturales, sociales e ingeniería se pueden modelar a través de relaciones del tipo:

$$b = ax \quad (1)$$

Donde: ***b*** es una cantidad que se expresa en términos de la variable ***x*** y la constante ***a***.

La expresión (1) recibe el nombre de ecuación lineal porque su representación grafica es una línea recta, así como se muestra en la gráfica No 1-1.



Gráfica No 1.1- Representación gráfica de la ecuación lineal *b = ax*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b \quad (2)$$

Por analogía la ecuación (2) es también una relación lineal y el conjunto de relaciones o ecuaciones de la forma (2) también se puede definir como un conjunto de relaciones lineales. A este conjunto de ecuaciones se le conoce como *Sistema Lineal*.

La forma general de los Sistemas Lineales se ilustra en (3).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (3)$$

Si bien la representación de los problemas empresariales a través de modelos matemáticos es el objeto central de este texto, también lo es la solución de los modelos. Por esta razón, en este punto se debe tomar la decisión de continuar con el proceso de modelación de los problemas o incursionar en la solución de dichos modelos. Sin ningún criterio metodológico se ha decidido tratar primero la solución de los modelos, dejando para más adelante el proceso de modelación de los problemas administrativos a través de sistemas lineales

---

Ejemplos de Problemas empresariales que pueden ser modelados a través de sistemas Lineales

El costo de producir un producto en función de los costos fijos, los costos variables y el volumen producido: C(x) =F +Vx

Los Ingresos proyectados en función del precio de venta y la cantidad de unidades vendidas: I(x)=Px

La Utilidad en función de los Ingresos y los costos: U(x)=Px-(F+Vx)

La depreciación en función del valor del activo, el tiempo y el valor de salvamento: D=(A-S)/t

La Demanda de un producto en función del precio de venta: Q(p)=A-bp

La Oferta de un producto en función del precio de venta: O=bp-A

El análisis del Punto de equilibrio del mercado que relaciona la demanda y la oferta.

---

2. SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

El análisis de la solución de los sistemas lineales se hace a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3).

2.1 Solución ecuación: *y = ax* (1)

La solución de la ecuación (1) es un valor "**s**" el cual tiene la propiedad de satisfacer la ecuación cuando x = *s*. El valor de "*s*" en este caso es único, ya que no existe un valor diferente que sea capaz de satisfacer la igualdad.

En el ejemplo 1.1 se ilustra la solución de la ecuación (1).

Ejemplo 1.1 Solución de la ecuación (1)

Hallar la solución de: 45 = 30 + 5x

La solución **s** que satisface la ecuación es s=3; ya que si x=s se satisface la igualdad.

45 = 30 + 5(3)

No existe otro valor que satisfaga la ecuación dada.

2.2 Solución de la **ecuación** $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ **(2)**

La solución de **(2)**, por su parte, es un conjunto de valores S={s_1, s_2, …,s_n} que tienen la propiedad de satisfacer la igualdad cuando x_1=s_1, x_2=s_2, …,x_n=s_n. En este caso existen varios conjuntos S que pueden llegar a satisfacer la ecuación, así como se muestra en el ejemplo 1.2 que ilustra la solución.

Ejemplo 1.2 Solución de la ecuación (2)

Hallar la solución de: ***$3x_1 – 2x_2 +5x_3 = 20$***

En este caso existen varios conjuntos **S ={s_1, s_2, s_3}** que son solución, ya que al tomar estos valores **x_1, x_2** y **x_3** se satisface la ecuación, veamos algunos de estas soluciones.

S´= {2, 3, 4}; S´ es una solución ya que si **x_1=2, x_2 =3** y **x_3 =4** se satisface la igualdad. 3(2)–2(3)+5(4)= 20

Otro conjunto S que soluciona la ecuación es: S´´={6, 2, 6/5} ya que si **x_1=6, x_2 =2 y x_3 =6/5** se satisface igualmente la ecuación 3(6) –2(2) +5(6/5) = 20

Halle al menos dos (2) soluciones más para dicha ecuación.
¿Cuántas soluciones tendrá esta ecuación?

2.3 Solución de la ecuación (3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

La solución para el sistema (3) es un conjunto de valores S ={s_1, s_2, …,s_n} que tienen la propiedad de satisfacer cada una de las ecuaciones cuando x_1=s_1, x_2=s_2, …,x_n=s_n. Considerando que la solución ya no se saca por simple inspección, como en los casos anteriores; para hallar “S” es necesario recurrir a alguna técnica de solución; en lo que sigue se ilustran los métodos de Eliminación y Solución Gráfica.

Método de eliminación

El método consiste en transformar el sistema lineal original en otro más sencillo de fácil solución; cuyo resultado sea igual al original.

La transformación se logra eliminando variables paso a paso con el fin de ir reduciendo el sistema. Por ejemplo, si el sistema tiene 5 ecuaciones inicialmente se elimina una variable para conseguir un sistema de 4 ecuaciones, seguidamente se elimina otra para obtener un sistema de 3 y así hasta llegar a una ecuación.

Para realizar la transformación se parte de la premisa que un sistema de ecuaciones no varía cuando se realizan en él, alguna o varias de las siguientes operaciones:

a. **Intercambiar dos ecuaciones.**
b. **Multiplicar o dividir una ecuación por una constante distinta de cero.**
c. **Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.**

En los ejemplos 1.3, 1.4 y 1.5, se ilustra la técnica de solución por el método de eliminación considerando tres tipos de Sistemas lineales.

En el primer caso se trata los sistemas donde el número de variables es igual al número de ecuaciones; en el segundo los sistemas donde el número de variables es mayor al número de ecuaciones y en el tercer caso los sistemas donde el número de ecuaciones es mayor al número de variables.

Caso 1. El número de ecuaciones es igual al número de variables

---

Ejemplo 1.3 Solucione el siguiente sistema lineal por el método de eliminación:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12 \qquad (1)$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \qquad (2)$$
$$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \qquad (3)$$

Solución

Paso 1

En el sistema lineal dado se elimina la variable $\mathbf{x_1}$ para obtener un sistema de dos ecuaciones; para esto combinamos la ecuación (1) con la (2) y la ecuación (1) con la (3); eliminando en ambos casos variable $\mathbf{x_1}$

Para eliminar $\mathbf{x_1}$, combinando (1) y (2), restamos la ecuación (2) de la (1)

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12 \\
-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -14 \\
\text{-------------------} \\
\qquad 7x_2 + 4x_3 = -2 \quad (4)
\end{array}
$$

Para eliminar $\mathbf{x_1}$, combinando (1) y (3), sumamos menos 3 veces la (1) ecuación con la ecuación (3)

Menos tres veces la ecuación (1) es: $-6x_1-12x_2-18x_3 = -36$

$$
\begin{array}{l}
-6x_1 - 12x_2 - 18x_3 = -36 \\
6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\
\text{-------------------} \\
\qquad -10x_2 - 20x_3 = -40 \quad (5)
\end{array}
$$

El nuevo sistema esta formado por las ecuaciones (4) y (5)

$$
\begin{array}{l}
7x_2 + 4x_3 = -2 \quad (4) \\
-10x_2 - 20x_3 = -40 \quad (5)
\end{array}
$$

Paso 2

En el sistema lineal formado por (4) y (5) se elimina la variable $\mathbf{x_2}$ para obtener un sistema de una ecuación. Para esto combinamos las ecuaciones (4) y (5).

Antes de combinar las dos ecuaciones se divide la ecuación (5) por 10 y se multiplicar por 7. Dividiendo (5) por 10 se obtiene (5) modificada: $-x_2 - 2x_3 = -4$ (5´). Multiplicando el resultado por 7, se obtiene (5´) modificada: $-7x_2 - 14x_3 = -28$ (5´´)

Lo siguiente es combinar (4) y (5´´); para eliminar x_2.

$$
\begin{array}{l}
7x_2 + 4x_3 = -2 \quad (4) \\
-7x_2 - 14x_3 = -28 \quad (5´´) \\
\text{------------------------} \\
\qquad -10x_3 = -30 \quad (6)
\end{array}
$$

Paso 3

A partir de la ecuación (6) se puede empezar a obtener la solución del sistema lineal, así:

De la ecuación (6) se puede obtener el valor de $x_3 = 3$.

Remplazando el valor de x_3 en (4), se obtiene el valor de $x_2 = -2$

Remplazando el valor de x_3 y x_2 en (1), se obtiene el valor de $x_1 = 1$

De la solución obtenida se puede decir que esta es única, ya que no existe un conjunto de valores diferente a {3, -2,1} que satisfaga las tres ecuaciones del sistema.

Nótese que en realidad lo que obtuvo fue un nuevo sistema lineal, más simple que el original, de fácil solución, compuesto por las ecuaciones:

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12} & (1) \\
\mathbf{7x_2 + 4x_3 = -2} & (4) \\
\mathbf{x_3 = 3} & (6)
\end{array}
$$

Paso 4

Compruebe el resultado remplazando los valores de x_1, x_2, x_3 en las ecuaciones del sistema original. Recuerde que la solución debe satisfacer todas las ecuaciones del sistema.

Remplazando en la ecuación (1) se obtiene que: 2(1)+4(-2)+6(3) = 12, es decir 12 = 12
Remplazando en la ecuación (2) se obtiene que: 2(1)-3(-2)+2(3) = 14, es decir 14 = 14
Remplazando en la ecuación (3) se obtiene que: 6(1)+2(-2)-2(3) = -4, es decir -4 = -4

Caso 2. El número de variables es mayor al número de ecuaciones

Ejemplo 1.4 Solucionar el siguiente sistema lineal por el método de eliminación:

4x + 3y + z = 2 (1)
2x + y - z = -4 (2)

Paso 1
En el sistema lineal dado se elimina la variable **x** para obtener un sistema de una ecuación.; para esto combinamos la ecuación (1) con la (2).

Para eliminar **x**, combinando (1) y (2), restamos dos veces la ecuación (2) de la (1)

Dos veces la ecuación (2) es igual a: 4x+2y-2z = -8;

Realizando la resta se obtiene:
 4x+ 3y + z = 2
-4x -2y +2z = 8
----
 y +3z = 10 (3)

Paso 2
Considerando que no es posible reducir más el número de ecuaciones, el sistema más simplificado que se puede obtener es:

4x+ 3y + z = 2 (1)
 y +3z = 10 (3)

Para encontrar la solución, en la ecuación (3) se despeja y, así: y = 10-3z

Remplazando el valor de y en la ecuación (1) se obtiene: 4x + 3(10-3z) + z = 2; es decir:

x = 2z-7

Si z es un valor Real cualquiera (z = ß), entonces la solución del sistema lineal es:

x = 2ß -7; y = 10-3ß; z = ß

Considerando que ß es un numero real cualquiera se puede afirmar que el sistema tiene infinitas soluciones ya que para cada valor de ß, *x, y* y *z* tomaran valores diferentes que satisfacen las ecuaciones del sistema.

Así por ejemplo, si ß=0 entonces: x= -7; y= 10 y z= 0.

Paso 3
Comprobando el resultado obtenido, remplazando los valores de x, y, z en (1) y (2), se verifica que se satisfacen las ecuaciones del sistema:

Remplazando en la ecuación (1) se obtiene que: 4(-7)+3(10)+(0) = 2, es decir 2 = 2

Remplazando en la ecuación (2) se obtiene que: 2(-7)+ (10) -(0) = -4, es decir -4 = -4

Así se comprueba una de las infinitas soluciones que tiene este Sistema Lineal

Caso 3. El número de ecuaciones es mayor al número de variables

---

Ejemplo 1.5 Solucionar el siguiente sistema lineal utilizando el método de eliminación:

$$\begin{aligned} \mathbf{x + y} &= \mathbf{8} \quad (1)\\ \mathbf{4x - y} &= \mathbf{-4} \quad (2)\\ \mathbf{2x + y} &= \mathbf{2} \quad (3) \end{aligned}$$

<u>Paso 1</u>
En el sistema lineal dado se elimina la variable **y** para obtener un sistema de dos ecuaciones. Para esto combinamos la ecuación (1) con la (2) y la ecuación (1) con la (3).

Para eliminar **y**, combinando (1) y (2), sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{array}{l} x + y = 8 \\ -4x - y = -4 \\ \hline -3x = 4 \end{array}$$

De acá se obtiene que x= -4/3 (4)

Para eliminar **y**, combinando (1) y (3), restamos la ecuación (3) de la ecuación (1)

$$\begin{array}{l} x + y = 8 \\ -2x - y = -2 \\ \hline x = 6 \quad (5) \end{array}$$

<u>Paso 2</u>
Eliminada la variable **y** el sistema simplificado quedara:

$$\begin{aligned} \mathbf{x + y} &= \mathbf{8} \quad (1)\\ x &= -4/3 \quad (4)\\ x &= 6 \quad (5) \end{aligned}$$

Considerando que en este nuevo sistema **x** tiene dos valores diferentes, este será un sistema sin solución y por consiguiente tampoco tendrá solución el sistema original.

Con los ejemplos anteriores aparte de ilustrar el método de eliminación para la solución de los sistemas lineales se ha podido comprobar que las soluciones dependiendo del número de ecuaciones y de variables pueden ser de llegar a ser:

- **De solución única (Ejemplo 1.3).** Cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables.
- **De infinitas soluciones (Ejemplo 1.4).** Cuando el número variables es mayor al número de ecuaciones.

- **Sin Solución (Ejemplo 1.5).** Cuando el numero de ecuaciones es mayor al número de variables

Método gráfico

Otra forma de solucionar los sistemas lineales es gráficamente. Aunque el método es bastante sencillo, la metodología esta limitada desde el punto de vista práctico para sistemas bidimensionales; es decir, sistemas con dos variables.

El método utiliza el plano cartesiano en el cual se grafican las ecuaciones del sistema. El punto o puntos donde se interceptan las rectas que representan las ecuaciones será la solución del sistema lineal; de esta forma, en caso de no haber intercepción entre las rectas, se puede afirmar que el sistema no tiene solución.

Para hallar la solución se procede de la siguiente manera:

Paso 1.

En el plano cartesiano se grafican las ecuaciones de sistema.

Para realizar la gráfica de una ecuación se seleccionan y grafican dos puntos que cumplan con dicha ecuación. Considerando la condición de linealidad se traza una recta entre los dos puntos graficados, todos los puntos que componen la recta son solución para la ecuación que se gráfica.

Paso 2.

Considerando que la solución del sistema lineal debe cumplir con cada una de las ecuaciones, la solución del sistema necesariamente deberá ser el punto o puntos que interceptan las rectas que representan las ecuaciones.

A través del ejemplo 2.6 se ilustra el método de solución gráfico.

Ejemplo 1.6

Resolver el siguiente sistema lineal por el método gráfico:

$$x - y = -4 \quad (1)$$
$$2x + y = 6 \quad (2)$$

Solución

Para graficar la ecuación (1), se seleccionan los siguientes puntos:

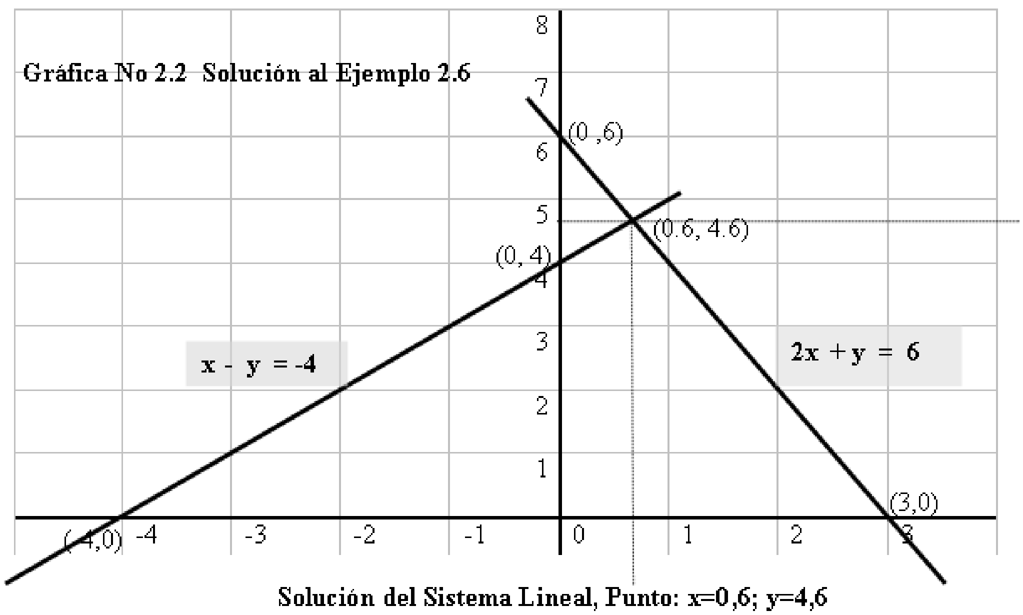
En la ecuación (1) si x = 0, entonces y = 4; así, un punto de esta recta será (0,4)

En la ecuación (1) si y = 0, entonces x = -4; así, otro punto de la recta será (-4,0)

Para graficar la ecuación (2), se procede de forma similar:
En la ecuación (2) si x = 0, entonces y = 6; así, un punto de esta recta será (0,6)
En la ecuación (2) si y = 0, entonces x = 3; así, un punto de esta recta será (3,0)

Para cada ecuación se ubican los puntos en el plano cartesiano y se unen por una recta. Los puntos que componen la recta son todas soluciones para la ecuación.

De otro lado, la intersección de las rectas, en caso de existir, será la solución que satisface ambas ecuaciones, es decir la solución del sistema lineal.



Si al realizar el gráfico, no hay un punto de intersección de las dos ecuaciones, entonces se puede afirmar que el sistema lineal no tiene solución. Por el contrario, si las dos rectas coinciden se podrá afirmar que el sistema lineal tiene infinitas soluciones.

Otros métodos de Solución

Otras técnicas para resolver los sistemas lineales solo se trataran una vez se haya desarrollado la teoría de matrices, en el capitulo 3 de esta Unidad.

3. APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES A LOS PROBLEMAS ADMINISTRATIVOS

Muchos problemas administrativos y económicos pueden modelarse a través de Sistemas Lineales. Aunque la naturaleza de los problemas administrativos es variada, ya que el área cubre diferentes temáticas como: el mercadeo, la producción, los asuntos financieros y contables, el recurso humano y la gerencia es posible establecer un procedimiento general para modelar y resolver este tipo de problemas.

El procedimiento que se propone consta de los siguientes cinco pasos:

Paso 1. Entender e identificar el problema

Paso 2. Definir las variables

Paso 3. Construir el modelo

Paso 4. Solucionar el modelo

Paso 5. Verificar la solución

En los ejemplos 1.7 y 1.8 se ilustran algunas aplicaciones y la forma práctica de solucionar este tipo de problemas.

Ejemplo 1.7
Un empresario fabrica tres tipos de productos químicos A, B y C. Cada uno de ellos debe pasar por dos maquinas de procesamiento X y Y. De la experiencia se conoce que:

a. Una tonelada del producto A necesita dos horas de la maquina X y dos horas de la maquina Y.
b. Una tonelada del producto B necesita tres horas de la maquina X y dos horas de la maquina Y
c. Una tonelada del producto C necesita cuatro horas de la maquina X y tres horas de la maquina Y

Por semana, la maquina X esta disponible 80 horas y la maquina Y 60 horas. Dado el precio de las maquinas, la gerencia no quiere que permanezcan inactivas, por lo que desearía saber la cantidad de toneladas que se deben producir de cada producto de modo que las maquinas se utilicen en toda su capacidad. Se supone que el empresario puede vender cualquier cantidad de productos que se produzca.

Solución

Paso 1. Entender e identificar el problema.
Una buena estrategia es después de leer y entender explicar en que consiste el problema con sus propias palabras.

Paso 2. Definición de las variables
z_1: Cantidad de toneladas del producto A
z_2: Cantidad de toneladas del producto B
z_3: Cantidad de toneladas del producto C

Paso 3. Construcción del modelo
El número de horas que se utiliza la maquina X, esta dada por la suma de las horas que se requieren para producir A, las que se requieren para producir B, y las que se requieren para producir C; matemáticamente esto se expresa como:

$2z_1 + 3z_2 + 4z_3$

Si la disponibilidad total de la maquina X es 80 horas y ésta debe ser ocupada durante todo el tiempo entonces, dicha suma debe ser igual a 80.

$2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 80$ (1)

De un análisis similar para la maquina Y, se obtiene que:

$2z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 60$ (2)

De esta forma, el modelo lineal, es:

$\mathbf{2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 80}$ (1)
$\mathbf{2z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 60}$ (2)

Paso 4. Solución del modelo
Para solucionar el modelo se utiliza el método de eliminación.
Del sistema lineal, combinando las ecuaciones (1) y (2) se elimina la variable $\mathbf{z_1}$ para obtener un sistema de una ecuación.

Para eliminar $\mathbf{z_1}$, combinando (1) y (2), se resta la ecuación (2) de la (1), así se obtiene:

$2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 80$ (1)
$-2z_1 - 2z_2 - 3z_3 = -60$ (2)

$z_2 + z_3 = 20$; expresión que también se puede escribir como: $z_2 = 20 - z_3$ (3)

Remplazando $\mathbf{z_2}$ en (2) se tiene que:

$2z_1 + 2(20 - z_3) + 3z_3 = 60$, es decir que: $z_1 = {}^1/_2(20 - z_3)$ (4)

De esta forma, el sistema lineal simplificado es:
$\mathbf{z_2 = 20 - z_3}$ (3)
$\mathbf{z_1 = {}^1/_2(20 - z_3)}$ (4)

Considerando que $\mathbf{z_2}$ (cantidad de toneladas del producto B) y $\mathbf{z_3}$ (cantidad de toneladas del producto C) no pueden ser negativas, entonces de (3), se puede deducir que $\mathbf{z_3}$ debe ser un número real (**β)** menor o igual a 20, pero mayor o igual a 0. De otro lado, cuando $\mathbf{z_3}$ toma el mayor valor, es decir 20, de la igualdad (3) se puede deducir que $\mathbf{z_2}$ es 0; por su parte cuando $\mathbf{z_3}$ es cero el valor de $\mathbf{z_2}$ es 20. Así, $\mathbf{z_2}$ variara entre 0 y 20.

Un análisis similar al anterior se puede hacer para deducir el rango de valores de z_3 y z_1 a partir de la igualdad (4). Considerando que $\mathbf{z_1}$ (cantidad de toneladas del producto A) y $\mathbf{z_3}$ (cantidad de toneladas del producto C) no pueden ser negativas, entonces de (4), se puede deducir que $\mathbf{z_3}$ debe ser un número real (**β)** menor o igual a 20, pero mayor o igual a 0. De otro lado, cuando $\mathbf{z_3}$ toma el mayor valor, es decir 20, de la igualdad (4) se puede deducir que $\mathbf{z_1}$ es 0; por su parte cuando $\mathbf{z_3}$ es cero el valor de $\mathbf{z_1}$ es 10. Así, $\mathbf{z_1}$ variara entre 0 y 10.

Es decir que la solución del sistema será:

$0 \le \mathbf{z_1} \le 10$;

$0 \le \mathbf{z_2} \le 20$;

$0 \le \mathbf{z_3} \le 20$

Este tipo de soluciones recibe el nombre de **SOLUCIÓN ACOTADA**

Paso 5. Compruebe la solución
Para comprobar la solución basta con verificar que para cualquier número β entre el rango de 0-20 se obtienen valores para $\mathbf{z_2}$ y $\mathbf{z_1}$ que cumplen con las dos ecuaciones (1) y (2)

Por ejemplo, si $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{5}$, entonces de las ecuaciones (3) y (4), $\mathbf{z_2 = 15}$ y $\mathbf{z_1 = 7.5}$

Remplazando estos resultados en (1) y (2), se tiene:

2(7.5) + 3(15) + 4(5) = 80 ¡Correcto!

- 2(7.5) + 2(15) + 3(5) = 60 ¡Correcto!

Ejemplo 1.8
Una persona ha invertido $ 45.000.00, una parte al 2% y la otra al 3% de "interés simple". Sabiendo que los intereses que recibe mensualmente ascienden a $ 1.100 se pide encontrar las cantidades que tiene colocadas a los distintos tipos de interés.

Solución

Paso 1. Entender e identificar el problema.

Paso 2. Definición de las variables
x: Monto invertido al 2%
y: Monto invertido al 3%

Paso 3. Construcción del Modelo
Los intereses totales son la suma de los intereses devengados por el capital al 2%, más los intereses que se reciben por el capital al 3%.

Intereses del capital al 2% = $\mathbf{(^2/_{100})x}$
Intereses del capital al 3% = $\mathbf{(^3/_{100})y}$

De esta manera: $\mathbf{(^2/_{100})x + (^3/_{100})y = 1100}$ (1)

De otro lado el monto total invertido es: $\mathbf{x + y = 45000}$ (2)

De esta manera, el modelo esta compuesto por las ecuaciones (1) y (2)

$$\mathbf{(^2/_{100})x + (^3/_{100})y = 1100} \quad (1)$$
$$\mathbf{x + y = 45000} \quad (2)$$

Paso 4. Solución del modelo
El sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se puede solucionar ya sea por el método de eliminación o por el método gráfico. A manera de ejemplo se presentan ambas soluciones a continuación.

Método de eliminación
Antes de eliminar una variable se sugiere multiplicar la ecuación (1) por 100, con el fin de mejorar su presentación.

$$2x + 3y = 110000 \quad (1)$$
$$x + y = 45000 \quad (2)$$

Para eliminar x y así obtener un sistema de una ecuación se resta 2 veces la ecuación (2) de la ecuación (1).

Dos veces la ecuación (2) es igual a: $2x + 2y = 90000$

Realizando la resta:

 2x + 3y = 110000
-2x - 2y = 90000
----
y = 20000   (3)

Remplazando (3) en (2) se obtiene el valor de x, así:

x + 20000 = 45000 entonces x = 25000

<u>Paso 5.</u> Compruebe la solución
Para comprobar la solución remplazamos los valores de x, y en las ecuaciones (1) y (2) y verificamos que se satisfagan las ecuaciones.

Remplazando en (1)
2(25000) +3(20000) = 110000, es decir: 110000 = 110000

Remplazando en (2)
25000 + 20000 = 45000, es decir: 45000 = 45000

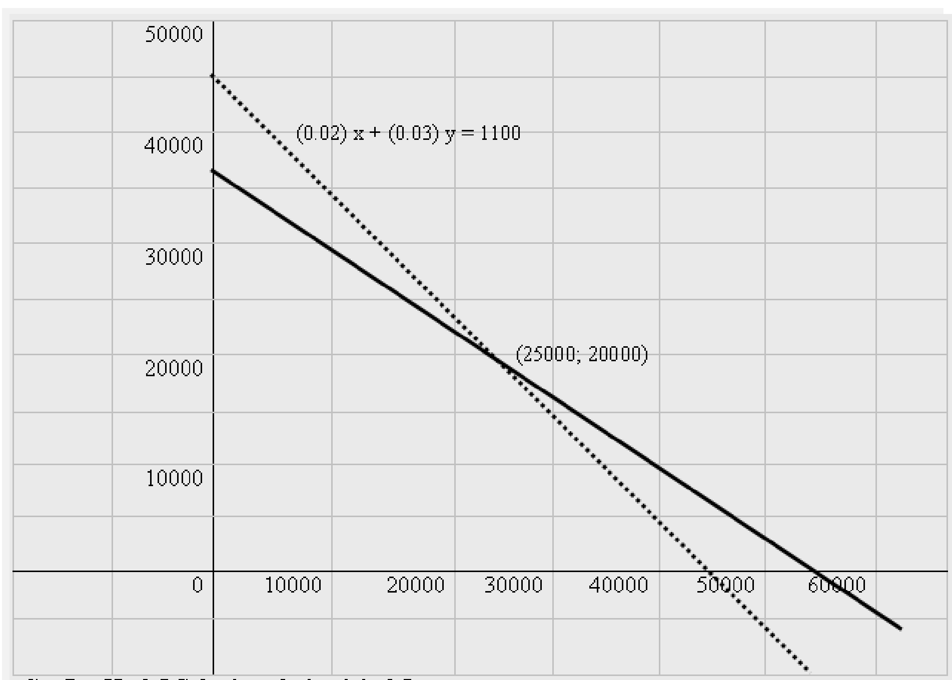
<u>Solución del Sistema Lineal por el Método Gráfico</u>

(0.02) x + (0.03) y = 1100   (1)

x +   y = 45000   (2)

Para graficar la ecuación (1), se seleccionan y grafican los siguientes puntos:
En la ecuación (1) si x = 0, entonces y = 36.666,66; así el punto será (0; 36.666,66)
En la ecuación (2) si y = 0, entonces x = 55.000; así el punto será (55.000; 0)

Para graficar la ecuación (2), se seleccionan los siguientes puntos:
En la ecuación (2) si x = 0, entonces y = 45000; así el punto será (0; 45000).
En la ecuación (2) si y = 0, entonces x = 45000; así el punto será (45000; 0)



Grafica No 2.5 Solución al ejercicio 2.8

Capitulo 2
Teoría de Matrices

Contenido

Objetivos

Entender el concepto de matriz y reconocer los diferentes elementos que la componen.

Identificar los diferentes tipos de matrices

Realizar las operaciones algebraicas básicas con matrices y sus propiedades

Identificar una Matriz Escalonada Reducida por Filas –MERF-

Transformar una matriz en una MERF

INTRODUCCIÓN

Las matrices constituyen un instrumento muy poderoso para tratar con los modelos lineales. En esta unidad se hace una introducción a la teoría general de matrices, además se define de determinantes estrechamente asociado con ellas.

En particular en el capitulo se define el concepto de matriz, se analizan las operaciones con matrices y sus propiedades, se define la matriz inversa y finalmente se la teoría sobre determinantes.

1. DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz **A** se define como un arreglo rectangular de números reales ordenados en filas (**m**) y columnas (**n**). De esta forma una matriz de **m** x **n** se escribe como:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Notación de una matriz

De manera abreviada las matrices se denotan con una letra mayúscula acompañada de subíndices que indican el número de filas por el número de columnas –Dimensión u orden de la matriz-. Así por ejemplo para la matriz de la definición será: $\mathbf{A_{mxn}}$ y la notación indica que se trata de una matriz **A** de orden o dimensión m x n.

En forma extensa, las matrices se denotan indicando todos los elementos que la componen entre corchetes, ubicados en la posición que ocupan en el arreglo. De otro lado, los elementos se denotan con letras minúsculas acompañados de subíndices que indican la fila y la columna en la cual se encuentra ubicados. Así por ejemplo el elemento $\mathbf{a_{52}}$ indica que se trata del elemento a ubicado en la fila 5 con la columna 2.

Los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 ilustran la definición de matriz, así como la forma de denotarlas.

Ejemplo 2.1	Ejemplo 2.2
A= $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 14 & -10 & 7 \end{vmatrix}$ De acuerdo a la definición se puede afirmar que: - **A** es una matriz de orden **5x3** - La notación abreviada es $\mathbf{A_{5x3}}$ - El elemento $\mathbf{a_{52}}$ = 1 - El elemento $\mathbf{a_{25}}$ = No existe	F = $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & -8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ De acuerdo a la definición se puede afirmar que: - **F** es una matriz de orden **2x4** - La notación abreviada es $\mathbf{F_{2x4}}$ - El elemento $\mathbf{f_{22}}$ = -8 - El elemento $\mathbf{f_{14}}$ = -5

Ejemplo 2.3	Ejemplo 2.4
D = $\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{vmatrix}$ De acuerdo a la definición se puede afirmar que: - **D** es una matriz de orden **5x1** - La notación abreviada es $\mathbf{D_{5x1}}$ - El elemento $\mathbf{d_{52}}$ = No existe - El elemento $\mathbf{d_{21}}$ = 0	Z = $\begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix}$ De acuerdo a la definición se puede afirmar que: - **Z** es una matriz de orden **1x1** - La notación abreviada es $\mathbf{Z_{1x1}}$ - El elemento $\mathbf{z_{11}}$ = 5 - El elemento $\mathbf{z_{12}}$ = No existe

Matriz cuadrada

Si m = n, es decir el número de filas igual al número de columnas, se dice que la matriz es cuadrada.

Matriz Diagonal

La matriz diagonal es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Es decir, si la Matriz **B** es una matriz diagonal todos los elementos $\mathbf{b_{ij}}$ = 0 para $\mathbf{i \neq j}$.

Matriz Escalar

La matriz escalar es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal principal son iguales. Es decir, que si la Matriz **C** es una matriz escalar todos los elementos $\mathbf{c_{ij}}$ son iguales, para **i = j**

Matriz Identidad

La matriz identidad es una matriz escalar donde los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Es decir, que si la Matriz $\mathbf{D_{ixJ}}$ es una matriz identidad todos los elementos $\mathbf{b_{ij}}$ = 1 para **i = j.** El ejemplo 3-10 es el caso de una matriz identidad.

En los siguientes ejemplos se ilustran los anteriores tipos de matrices

Ejemplo 2.5	Ejemplo 2.6
$A= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 44 & 88 & -1 & 9 \\ 43 & 66 & 7 & 10 \\ -10 & 7 & -2 & 5 \end{vmatrix}$	$F = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$
Matriz CUADRADA	**Matriz DIAGONAL**

Ejemplo 2.7	Ejemplo 2.8
$A= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
Matriz ESCALAR	**Matriz IDENTIDAD**

Transpuesta de una matriz

Sea una matriz M = $[m_{ij}]$, es decir de orden ixj; se define su transpuesta como la matriz $M^T = [m_{ji}]$. Es decir, que la transpuesta será una matriz de orden jxi, cuyos elementos serán m_{ji}.

En la práctica la transpuesta se obtiene intercambiando las filas y las columnas de la matriz original. A través del ejemplo 2.9 se ilustra la forma de hallar la transpuesta de una matriz.

Ejemplo 2.9

Hallar la transpuesta de la siguiente matriz.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -84 & 52 \\ 1 & -21 & 5 \\ 41 & 0 & 51 \\ 51 & 21 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

De acuerdo a la definición A^T será igual a una matriz de orden 3x4, donde las filas de A se convierten en columnas y a su vez las columnas se convierten en filas.

$$\mathbf{A^T} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 41 & 51 \\ -84 & -21 & 0 & 21 \\ 52 & 5 & 21 & 1 \end{vmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices **A** y **B** serán iguales si se cumple que:

- **A** y **B** son del mismo orden y
- todos los elementos $a_{ij} = b_{ij}$

En el ejemplo 2.10 se ilustra el concepto de igualdad de matrices

---

Ejemplo 2.10
Diga bajo que condiciones son iguales las matrices L y S.

$$L = \begin{vmatrix} 15 & 25 \\ 55 & 45 \\ 79 & 65 \\ 84 & 85 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 15 & 25 \\ x & 45 \\ 79 & z \\ 84 & 85 \end{vmatrix}$$

Solución

De acuerdo a la definición de igualdad: Dado que L y S son del mismo orden (4x2); L podrá ser igual a S si y solo si se cumple que x = 55 y z = 65.

---

2. OPERACIONES ENTRE MATRICES

En los siguientes apartados se definen las operaciones entre matrices

2.1 Suma de matrices

Si **A** y **B** son matrices del mismo orden mxn, entonces se puede definir la suma de **A** + **B** como la matriz **C** de orden mxn y cuyos elementos $\mathbf{c_{ij}}$ serán:

$\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{a_{ij}} + \mathbf{b_{ij}}$

2.2 Multiplicación escalar

Si **A = [a_{ij}]** es una matriz de mxn y **ρ** es un número real, entonces el múltiplo escalar de A por ρ**,** ρA**,** es una matriz **B = [b_{ij}]** de mxn, donde:

$b_{ij} = \rho a_{ij}$ donde $i \geq 1$ y $i \leq m$; $j \geq 1$ y $j \leq n$

2.3 Diferencia entre matrices

La diferencia entre matrices no esta definida directamente; no obstante, considerando la definición de la suma y de la multiplicación escalar se puede definir la diferencia entre matrices como la suma de dos matrices, donde la segunda esta multiplicada por el escalar **ρ** = -1.

Es decir, la diferencia de **A** y **B**, siendo ellas del mismo orden, se define como: **A + (-1)B.**

El ejemplo 2.11 se ilustra la suma, multiplicación escalar y diferencia entre matrices

---

Ejemplo 2.11
Un fabricante de muebles produce camas, sillas y mesas en sus fábricas de Medellín, Bogotá y Cali. Los costos de fabricar las camas son de 200, 180 y 210 mil en Medellín, Bogota y Cali respectivamente; los de producir las sillas son de 80, 95 y 105 mil y los de fabricar las mesas son de 105, 160, 170 mil en las mismas ciudades respectivamente. Por su parte los costos de distribución de las camas son de 20, 25, 35 mil; los de distribuir las sillas son de 5, 7 y 7 mil y los de distribuir las mesas son de 12, 16, 14 mil para las ciudades de Medellín, Bogotá y Cali respectivamente.

a) Se solicita hallar los costos totales para cada producto en cada ciudad.
b) Si el margen de utilidad es del 45%. ¿Cuál será, entonces, el precio de venta de las camas, sillas y mesas en cada ciudad?
c) Si el fabricante ofrece descuentos por ventas al por mayor del 12%, 16% y del 10% para cada producto en las ciudades de Medellín, Bogotá y Cali respectivamente. Calcule el precio de venta al por mayor de cada producto en cada ciudad.

Solución a)
Aplicación Suma de Matrices

Los costos de fabricar cada producto por ciudad se muestran en la matriz **Q** (valores en miles); por su parte, los costos de distribución de los productos por ciudad se muestran en la matriz **R** (en miles)

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogotá} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 200 & 180 & 210 \\ 80 & 95 & 105 \\ 105 & 160 & 170 \end{array} \right| \end{array} \qquad \mathbf{R} = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogotá} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 20 & 25 & 35 \\ 5 & 7 & 7 \\ 12 & 16 & 14 \end{array} \right| \end{array}$$

Valores en miles   Valores en Miles

Para conocer los costos totales se deben sumar **Q** costos de fabricación más **R** costos de distribución, lo cual se puede hacer ya que ambas matrices tienen el mismo orden. **C = Q+R**

Medellín **Bogotá** **Cali**   **Medellín** **Bogotá** **Cali**

$$C_T = \begin{array}{l} \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 200+20 & 180+25 & 210+35 \\ 80+5 & 95+7 & 105+7 \\ 105+12 & 160+16 & 170+14 \end{array} \right| = \begin{array}{l} \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 220 & 205 & 245 \\ 85 & 102 & 112 \\ 117 & 176 & 184 \end{array} \right|$$

Valores en miles

Valores en Miles

Solución b)
Aplicación Producto Escalar

Considerando que el margen de utilidad es del 45% para cada producto, entonces, los costos totales de los productos por ciudad deben ser multiplicados por 1.45 para determinar el precio de venta. Es decir, multiplicar por **ρ** = 1.45

$$P = \rho . C_T = \begin{array}{l} \\ \textbf{Camas} \\ \textbf{Sillas} \\ \textbf{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1.45).\ 220 & (1.45).\ 205 & (1.45).\ 245 \\ (1.45).\ 85 & (1.45).\ 102 & (1.45).\ 112 \\ (1.45).\ 117 & (1.45).\ 176 & (1.45).\ 184 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 319.00 & 297.25 & 355.25 \\ 123.25 & 147.90 & 162.40 \\ 169.65 & 255.20 & 266.80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución c)
Diferencia entre Matrices

Lo primero que se debe hacer es calcular los descuentos para cada producto en cada ciudad. Estos se calculan como el precio de venta (Valores de la P del ejemplo anterior) por el % de descuento en cada ciudad. Los resultados se consignan en la Matriz **D**

$$D = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 38.28 & 47.56 & 35.53 \\ 14.79 & 23.66 & 16.24 \\ 20.35 & 40.83 & 26.68 \end{bmatrix} \end{array}$$

De otro lado el precio con descuento (**P´**) se puede calcular, como: **P´ = P + ρD,** siendo **ρ= -1** y **P** la matriz precios de b).

$$\rho D = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -38.28 & -47.56 & -35.53 \\ -14.79 & -23.66 & -16.24 \\ -20.35 & -40.83 & -26.68 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P' = P + \rho D = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 319.00+(-38.28) & 297.25+(-47.56) & 355.25+(-35.53) \\ 123.25+(-14.79) & 147.90+(-23.66) & 162.40+(-16.24) \\ 169.65+(-20.35) & 255.20+(-40.83) & 266.80+(-26.68) \end{bmatrix} \end{array}$$

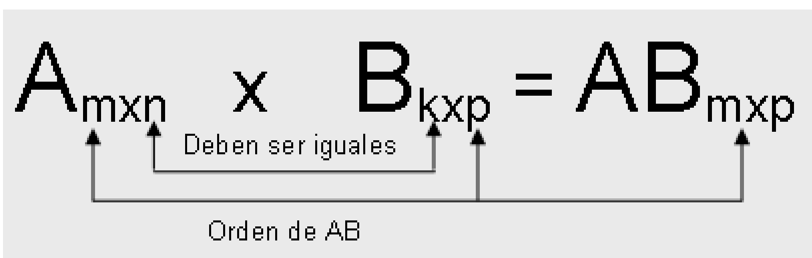
$$P' = P + \rho D = \begin{array}{l} \\ \text{Camas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Medellín} & \textbf{Bogota} & \textbf{Cali} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 280.72 & 249.69 & 319.72 \\ 108.46 & 124.24 & 146.16 \\ 149.30 & 214.37 & 240.12 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.4 Multiplicación de matrices

Si **A** es una matriz de orden **mxn** y **B** una matriz de orden **kxp**, se puede definir la multiplicación de AB solo si n = k. Es decir si el número de columnas de **A** es igual al número de filas de **B.** En caso de que n = k, entonces, el producto de **AB** = **C** será del orden **mxp** y los elementos de C = **[c_{ij}]** son iguales a la sumatoria del producto de los elementos de la fila **i** de **A** por los elementos de la columna **j** de **B**. Es decir:

$$\mathbf{c_{ij}} = \sum_{K=1}^{p} \mathbf{a_{ik}} \,.\, \mathbf{b_{kj}}$$

Regla para la Multiplicación de Matrices



A través del ejemplo 2.12 y 2.13, se ilustra la multiplicación de matrices

Ejemplo 2.12
Dadas las matrices **M** y **G** que se muestran a continuación; se pide hallar el producto de **M** por **G**

$$\mathbf{M_{2x3}} \begin{vmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{G_{3x2}} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución
Es posible hallar el producto de **M** por **G** ya que el número de columnas de **M** (3) es igual al número de filas de **G** (3). De otro lado, el orden de **MG = C** será **2x2** y los elementos de C, serán:

c_{11} = [(15x10)+(10x0)+(5x3)] = 165

$$\mathbf{M_{2x3}} \begin{vmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{G_{3x2}} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \;\mathbf{=}\; \mathbf{MG_{2x2}} \begin{vmatrix} 165 & \\ & \end{vmatrix}$$

c_{12} = [(15x1)+(10x2)+(5x5)] = 60

$$M_{2x3}\begin{vmatrix}15 & 10 & 5\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix} \quad G_{3x2}\begin{vmatrix}10 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix} = MG_{2x2}\begin{vmatrix}165 & 60\\ & \end{vmatrix}$$

c_{21} = [(4x10)+(0x0)+(3x3)] = 49

$$M_{2x3}\begin{vmatrix}15 & 10 & 5\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix} \quad G_{3x2}\begin{vmatrix}10 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix} = MG_{2x2}\begin{vmatrix}165 & 60\\ 49 & \end{vmatrix}$$

c_{22} = [(4x1)+(0x2)+(3x5)] = 19

$$M_{2x3}\begin{vmatrix}15 & 10 & 5\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix} \quad G_{3x2}\begin{vmatrix}10 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix} = MG_{2x2}\begin{vmatrix}165 & 60\\ 49 & 19\end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.13

Una fábrica de muebles produce camas y comedores que deben pasar por un proceso de armado y uno de acabado. Las camas requieren 5 horas de armado y 3 de acabado y los comedores 6 horas de armado y 4 de acabado. Se fabrica en dos centros de producción ubicados en Medellín y Bogotá. En Medellín el costo por hora de armado es de $500 y el de acabado de $600; en Bogotá el costo de armado es $400 y el de acabado $550.

Se pide que usted calcule los siguientes costos:

a) Costos de fabricar una cama en Medellín.
b) Costos de fabricar una cama en Bogotá.
c) Costos de fabricar un comedor en Medellín
d) Costos de fabricar un comedor en Bogotá.

Solución

Los tiempos de armado y acabado para cada ciudad se pueden consignar en una matriz que se llamara **F,** de la siguiente forma:

$$F_{2x2} \quad \begin{array}{l c} & \begin{array}{cc}\text{Armado} & \text{Acabado}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Camas}\\ \text{Comedores}\end{array} & \begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix} \\ & \text{Valores en Horas}\end{array}$$

De igual forma se pueden ordenar los costos de mano de obra de armado y acabado en cada ciudad en una matriz **M**, así:

$$M_{2x2} \quad \begin{array}{l c} & \begin{array}{cc}\text{Medellín} & \text{Bogota}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Armado}\\ \text{Acabado}\end{array} & \begin{vmatrix}500 & 400\\ 600 & 550\end{vmatrix} \\ & \text{Valores en Pesos}\end{array}$$

Detállese que al multiplicar **FM = C**, se obtienen los costos que se están solicitando.

Costo de Producir camas en Medellín

$$F_{2x2}\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix} \quad M_{2x2}\begin{vmatrix}500 & 400\\ 600 & 550\end{vmatrix} = FM_{2x2}\begin{vmatrix}\mathbf{2500+1800\ (4300)} & \\ & \end{vmatrix}$$

Costo de Producir camas en Bogotá

$$F_{2x2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \quad M_{2x2}\begin{vmatrix} 500 & 400 \\ 600 & 550 \end{vmatrix} = FM_{2x2}\begin{vmatrix} 4300 & \begin{matrix}2000+1650\\(3650)\end{matrix} \\ & \end{vmatrix}$$

Costo de Producir comedores en Medellín

$$F_{2x2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \quad M_{2x2}\begin{vmatrix} 500 & 400 \\ 600 & 550 \end{vmatrix} = FM_{2x2}\begin{vmatrix} 4300 & 3650 \\ \begin{matrix}3000+2400\\(5400)\end{matrix} & \end{vmatrix}$$

Costo de Producir comedores en Bogotá

$$F_{2x2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \quad M_{2x2}\begin{vmatrix} 500 & 400 \\ 600 & 550 \end{vmatrix} = FM_{2x2}\begin{vmatrix} 4300 & 3650 \\ 5400 & \begin{matrix}2400+2200\\(4600)\end{matrix} \end{vmatrix}$$

Resultados Totales

		Medellín	Bogota
FM2x2	Costo Camas	**4300**	**3650**
	Costo Comedores	**5400**	**4600**

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE MATRICES

Las propiedades de las operaciones entre matrices no se demostraran por considerar que este aspecto esta fuera del alcance de este texto. No obstante, aquellas personas interesadas podrán consultar la bibliografía especializada que se relaciona al final. A cambio de lo anterior, lo que se hará será comprobar a través de ejemplos algunas de las propiedades que se exponen para cada operación.

3.1 Propiedades de la suma de matrices

Sean las matrices A, B, C, y D de orden m x n, se puede comprobar que:

a) A + B = B + A –Propiedad Conmutativa-

b) A + (B + C) = (A + B) + C –Propiedad Asociativa-

c) Existe una Matriz O de orden m x n, tal que: A + O = A; O se denomina la matriz nula o neutro aditivo.

d) Para cada matriz A existe una matriz D de m x n, tal que A + D = O; es decir que D = – A, donde –A se denomina Inverso aditivo o negativo de A.

3.2 Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean las matrices A, B y C del orden apropiado para ser multiplicadas, entonces, se puede comprobar que:

a) A(BC) = (AB)C –Propiedad asociativa de la multiplicación-

b) A(B+C) = AB +BC –Propiedad distributiva-

c) (A+B)C = AC +BC –Propiedad distributiva-

3.3 Propiedades de la multiplicación escalar

Si ρ y γ son números reales y A, B son matrices del orden apropiado para las operaciones que se plantean, entonces se puede demostrar que:

a) $\rho(\gamma A) = (\rho\gamma)A$

b) $(\rho + \gamma)A = \rho A + \gamma A$

c) $\rho(A + B) = \rho A + \rho B$

d) $A(\rho B) = \rho(AB) = (\rho A)B$

3.4 Propiedades de la transpuesta

Si ρ es un número real y A, B son matrices del orden apropiado para las operaciones que se plantean, entonces se puede demostrar que:

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(AB)^T = B^T A^T$

d) $(\rho A)^T = \rho A^T$

A través de los ejemplo 2.14 y 2.15, se ilustra la forma de comprobar las propiedades anteriores. Se deja al estudiante la tarea de comprobar las propiedades restantes.

Ejemplo 2.14

Dadas las matrices A, B y C que se muestran a continuación, se pide comprobar la propiedad asociativa de la multiplicación; es decir **A(BC) = (AB)C**

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -25 \\ -12 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución

Para comprobar la propiedad primero calculamos el lado izquierdo de la igualdad, es decir: BC y seguidamente A(BC); después calculamos el lado derecho de la igualdad, es decir: AB y (AB)C; finalmente comprobamos que ambos lados son iguales.

Lado Izquierdo

$$B_{2x2} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \quad C_{2x3} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -25 \\ -12 & 10 & 5 \end{vmatrix} \quad BC_{2x3} = \begin{vmatrix} -72 & 110 & -65 \\ -78 & 140 & -110 \end{vmatrix}$$

$$A_{3x2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad BC_{2x3} = \begin{vmatrix} -72 & 110 & -65 \\ -78 & 140 & -110 \end{vmatrix} \quad A(BC) = \begin{vmatrix} \mathbf{-216} & \mathbf{330} & \mathbf{-195} \\ \mathbf{-150} & \mathbf{250} & \mathbf{-175} \\ \mathbf{-516} & \mathbf{830} & \mathbf{-545} \end{vmatrix}$$

Lado Derecho

$$A_{3x2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad B_{2x2} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \quad AB = \begin{vmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{vmatrix}$$

$$AB = \begin{matrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{matrix} \quad C_{2x3} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -25 \\ -12 & 10 & 5 \end{vmatrix} \quad A(BC) = \begin{vmatrix} \mathbf{-216} & \mathbf{330} & \mathbf{-195} \\ \mathbf{-150} & \mathbf{250} & \mathbf{-175} \\ \mathbf{-516} & \mathbf{830} & \mathbf{-545} \end{vmatrix}$$

De esta forma se puede comprobar que lado izquierdo de la igualdad es igual al lado derecho

---

Ejemplo 2.15

Dadas las matrices A y B, que se muestran a continuación, se pide comprobar la propiedad de la transpuesta $\mathbf{(AB)^T = B^T A^T}$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Para realizar esta comprobación hallamos el producto de AB y la transpuesta de dicho producto (lado izquierdo); seguidamente hallamos las transpuestas de A y B y el producto $B^T A^T$ (lado derecho); para así comprobar que lado izquierdo es igual al lado derecho de la igualdad.

Lado Izquierdo

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (AB) = \begin{vmatrix} 12 & 21 \\ 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (AB)^T = \begin{vmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Lado derecho

$$B^T = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B^T A^T = \begin{vmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Se comprueba que el lado izquierdo es igual al lado derecho en la igualdad

---

4. MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA POR FILAS (MERF)

Definición

Se puede afirmar que una matriz de orden m x n es *Escalonada Reducida por Filas (MERF)* si y solo satisface las siguientes propiedades:

a) Todas las filas que constan solo de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz

b) Al leer de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero en cada fila (que no esté formado completamente por ceros) es un 1, llamado la entrada principal de su fila

c) Si las filas i y i+1 son dos filas sucesivas que no consten completamente de ceros entonces la entrada principal de la fila i+1 esta a la derecha de la entrada principal de la fila i

d) Si la columna contiene una entrada principal de alguna fila, entonces el resto de las entradas de esta columna son iguales a cero.

Nótese que una matriz escalona reducida por filas podrá tener filas que consten completamente de ceros

En los ejemplos 2.16 y 2.17, se ilustra el concepto de Matriz Escalonada por Filas.

Ejemplo 2.16

Explique! ¿Es la matriz A una Matriz Escalonada por Filas?

$$\mathbf{A=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución

La Matriz A es una Matriz Escalonada Reducida por Filas (MERF), considerando que:

a) No aplica; ya que no tiene filas compuestas de ceros.
b) De izquierda a derecha la primera entrada de cada fila es 1

c) La entrada principal de la fila 2 esta a la derecha de la entrada principal de la fila 1; y a su vez la entrada principal de la fila 3 esta a la derecha de la fila 2

d) Las columnas 1, 2 y 3 tienen entradas principales (1) y las demás entradas son cero.

Ejemplo 2.17

Explique! ¿Es la matriz B una Matriz Escalonada por Filas?

$$\mathbf{B=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución

La Matriz B no es una Matriz Escalonada Reducida por Filas (MERF), considerando que no estante que se cumplen la mayoría de propiedades, no se cumple que: Las columnas 2 y 3 tienen entradas principales (1), pero las demás entradas no son todas cero.

Transformación de una matriz en una matriz escalonada reducida por filas

Para transformar una matriz en una *Matriz Escalonada Reducida por Filas* se pueden realizar las siguientes tres operaciones elementales sobre la matriz A:

a) Intercambiar filas de la matriz **A**, es decir, pasar la fila i a la posición de la fila j y a su vez pasar la fila j a la posición de la fila i.

b) Multiplicar cualquier fila por un escalar $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$

c) Sumar $\boldsymbol{\beta}$ veces la fila i de la matriz A a la fila j, $i \neq j$.

En los ejemplos 2.18 se ilustra la transformación de una matriz en una Matriz Escalona Reducida por Filas.

Ejemplo 2.18

Transformar la Matriz B, del ejemplo 3.17, en una Matriz Escalona Reducida por Filas (MERF)

$$\mathbf{B=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución

Para transformar B se procede a convertir los elementos de las columnas con entradas principales en cero, para esto se procede como sigue:

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sumar (-2) veces la 2da fila a la primera

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sumar (1) veces la 3era fila a la primera
Sumar (2) veces la 3era fila a la segunda

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la definición esta será una matriz reducida por Filas

---

5. LA INVERSA DE LA MATRIZ

Una matriz A de orden pxp es invertible si existe una matriz B de orden pxp, tal que:

$AB = BA = I_p$

Recuérdese la definición de Matriz Identidad. Si no existe la matriz inversa de A, entonces se dice que A es singular o no invertible.

La Matriz Inversa de A se denota como A^{-1}

5.1 Calculo de la matriz Inversa

A continuación se expone un procedimiento práctico para hallar la inversa de la matriz.

Paso 1 Formar la matriz [A | I_n], la cual se obtiene de aumentar la matriz A con la matriz I_n.

Paso 2 Se transforma la Matriz del paso 1 a una Matriz Escalonada Reducida.

Paso 3 Si la Matriz Escalonada Reducida que se obtiene en el paso 2 es [C|D], si C = I_n entonces D será la Inversa de A; por el contrario si C no es igual I_n entonces se puede afirmar que A no tiene Inversa.

En el ejemplo 2.19 se ilustra el procedimiento para hallar la inversa de una matriz.

Ejemplo 2.19

Hallar la Matriz Inversa de la matriz A, la cual se muestra a continuación:

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}\right|$$

Solución

Paso 1. Formar la matriz aumentada, como: **$[A \mid I_n]$**

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Paso 2. Transformar la matriz resultante en una Matriz Escalonada Reducida

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

A la tercera fila se le suma (-1) vez la primera fila.

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

A la segunda fila se suma (-2) veces la primera fila

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

A la tercera fila se suma (2) veces la segunda fila.

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

La tercera fila se divide por (-1)

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right|$$

A la segunda fila se suma 3 veces la tercera

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right|$$

A la primera fila se suma -2 veces la segunda

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -25 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right|$$

A la primera fila se suma -3 veces la tercera

$$\mathbf{A=}\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-40} & \mathbf{16} & \mathbf{9} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{13} & \mathbf{-5} & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{array}\right|$$

Considerando que C es la matriz I, entonces D será la **MATRIZ INVERSA**

5.2 Propiedades de la matriz Inversa

Si A y B son matrices no singulares o invertibles y A^{-1} y B^{-1} son las inversas respectivamente se puede probar que:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{-T}$

Se propone al estudiante comprobar las propiedades de la matriz inversa.

6. DETERMINANTES

6.1 Definición

Por definición a toda matriz cuadrada le podemos asignar un número real el cual recibe el nombre de Determinante.

El número se define como una serie de operaciones que se realizan en las diagonales derechas e izquierdas de la matriz. Sin ser rigurosos a continuación se hace una definición práctica que permite comprender el concepto y hacer uso de él en las aplicaciones a las que se recurre en el presente curso.

Los interesados en profundizar en el tema pueden consultar el tratamiento matemático riguroso en la bibliografía al final de capitulo.

Notación del Determinante

El determinante de la matriz A se denotara en este texto, como: det A

Definición 1: Determinante de una Matriz 2x2

$$A= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Si A es una matriz de orden 2x2, como se indica, se define el determinante de A, como: det A = $(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$

Definición 2: Determinante de una matriz de 3x3

$$A= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

Se define el determinante de la matriz A, como:

$\det(A)=(x_1.x_5.x_9 + x_2.x_6.x_7 + x_3.x_2.x_8)-(x_2.x_4.x_9 + x_1.x_6.x_8 + x_3.x_5.x_7)$

Calculo práctico del determinante

De forma práctica, el determinante se puede obtener aumentando la matriz con las primeras (n-1) columna. Sobre la matriz resultante se calcula el determinante como la suma de los productos de las diagonales de izquierda a derecha, menos la suma de los productos de las diagonales de derecha a izquierda.

Para el caso de la matriz de 3x3, se adicionan las dos primeras columnas

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_4 & x_5 \\ x_7 & x_8 & x_9 & x_7 & x_8 \end{array}\right|$$

$$\mathbf{\det(A)=(x_1.x_5.x_9 + x_2.x_6.x_7 + x_3.x_2.x_8)-(x_2.x_4.x_9 + x_1.x_6.x_8 + x_3.x_5.x_7)}$$

A través del ejemplo 2.20, ilustra la forma práctica de calcular el determinante.

Ejemplo 2.20

Calcular el determinante de la matriz H que se muestra a continuación

$$H=\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right|$$

Solución

Lo primero es aumentar la matriz H, con (n-1) columnas, en este caso 2 columnas

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right|$$

Seguidamente se calcula el det H, como la la suma de los productos de las diagonales de izquierda a derecha, menos la suma de los productos de las diagonales de derecha a izquierda; es decir:

det H = [(2x1x4)+(0x-2x3)+(-3x1x2)]-[(0x1x4)+(2x-2x2)+(-3x1x3) = 19

Considerando lo poco práctico del método anterior cuando se trata de matrices de dimensión mayor a 3, es necesario definir un procedimiento que permita calcular el determinante para matrices de cualquier orden; este procedimiento recibe el nombre de Cálculo del determinante por desarrollo de Cofactores.

Definición 3: Determinante de una matriz de mxm

Antes de definir el procedimiento para el cálculo del determinante de una matriz de mxm, debemos definir algunos elementos útiles para el cálculo.

Menor i,j

El menor i,j de una matriz A de orden m x m, denotado como Mij, es una matriz de orden (m-1) x (m-1) que resulta de suprimir la fila "i" y la columna "j" en la matriz original A.

Cofactor i,j

El cofactor i,j de una matriz A de orden m x m, denotado como Cij, se define como:

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$

Donde Mij es el menor de la matriz A.

Determinante de la matriz de orden m x m.

El determinante de una matriz A de orden m x m se puede calcular por el desarrollo de cofactores por fila o por columna de la matriz A.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Calculo del determinante de A por desarrollo de cofactores por la fila i

$\left| A \right| = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots. + a_{im} C_{im}$, donde i = 1,2,3, ..., m

Calculo del determinante de A por desarrollo de cofactores por la columna j

$\left| A \right| = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots. + a_{mj} C_{mj}$, donde j = 1,2,3, ..., m

Nota: como se puede deducir de la definición el método es aplicable para calcular el determinante de matrices de cualquier orden.

En el ejemplo 2.21 se ilustra la forma de calcular el determinante de una matriz A utilizando el método de desarrollo por cofactores por fila.

Ejemplo 2.21
Calcule el determinante de la matriz A, que se muestra a continuación, por desarrollo de cofactores por filas

$$A=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

Tomando la fila 3, el Determinante se calcula como:

$\det A = (-2)\, C_{31} + (0)\, C_{32} + (0)\, C_{33} + (-3)\, C_{34}$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \left| M_{31} \right| = \quad (1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \left| M_{31} \right| = [(2x1x4)+(0x5x2)+(-4x-2x6)] - [(0x-2x4)+(2x5x6)+(-4x1x-2)] = -12$

$$C_{34} = (-1)^{3+4} \left| M_{34} \right| = \quad (-1) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$C_{34} = (-1)^{3+4} \left| M_{34} \right| = [(4x-2x6)+(2x1x8)+(0x3x-2)] - [(2x3x6)+(4x1x-2)+(0x-2x-8)] = 60$

det A = = (-2) (-12) + (0) + (0) + (-3) (60) = -156

6.2 Propiedades de los Determinantes

a. Se puede demostrar que los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir $\det (A) = \det (A^T)$

b. Si la matriz B se obtiene de la matriz A al intercambiar dos filas o dos columnas de A, entonces se puede demostrar que $\det(B) = -\det(A)$

c. Se puede demostrar que si dos filas o dos columnas de A son iguales, entonces $\det(A) = 0$.

d. Se puede demostrar que si una fila o columna de una matriz A consta solo de ceros, entonces $\det (A) = 0$

e. Si B se obtiene de multiplicar una fila o columna de A por un número real β, entonces $\det (B) = \beta\det(A)$

f. Si B se obtiene de sumar un múltiplo de una fila o columna s a una fila o columna r ($r \neq s$) de una matriz A, entonces el det(B) = det(A)

g. Se puede demostrar que el determinante del producto de dos matrices A, B, es igual al producto del determinante de cada una de ellas, es decir: det(A.B) = det(A).det(B)

h. Se puede demostrar que si A tiene inversa; es decir: es no singular, entonces det(A) $\neq$ 0.

7. ALGEBRA DE MATRICES CON Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP[1]

Microsoft Excel es una poderosa herramienta en el tratamiento de las matrices, especialmente cuando se trata de realizar operaciones entre ellas. Se propone al estudiante investigar las funciones Determinante, Multiplicación e Inversa de Matrices.

[1] Copyright© Microsoft Corporation 1985-2001

Capitulo 3
Solución de Sistemas lineales con Matrices

Contenido

Los Sistemas Lineales y las Matrices
La Matriz Escalonada por Filas y la solución de los sistemas lineales
Solución de los sistemas lineales a través del método Gauss-Jordan
Solución de los sistemas lineales a través de la Matriz Inversa
Solución de los sistemas lineales a través de la Ley de Cramer
Solución de ecuaciones lineales con Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP

Objetivos

Relacionar los sistemas lineales y las matrices.
Escribir un sistema lineal en forma matricial.
Solucionar modelos lineales de “n” ecuaciones y “m” incógnitas a través del método GAUSS-JORDAN
Solucionar modelos lineales de “n” ecuaciones y “n” incógnitas a través de método de la matriz INVERSA
Solucionar modelos lineales de n ecuaciones y n incógnitas a través de método de la Ley de CRAMER
Utilizar Microsoft EXCEL para la solución de los sistemas lineales de “n” ecuaciones y “n” incógnitas.

1. LOS SISTEMAS LINEALES Y LAS MATRICES

En el capitulo 1 se definieron los sistemas lineales en forma general como el conjunto de ecuaciones que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1}\\
&\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2}\\
&\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad (1)\\
&\quad . \qquad . \qquad . \qquad .\\
&\quad . \qquad . \qquad . \qquad .\\
&\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m}
\end{aligned}$$

Considerando las propiedades de la multiplicación de matrices y la definición de igualdad entre ellas, el sistema lineal (1) se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{vmatrix}$$

De la anterior notación matricial, podemos distinguir las partes como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = A \quad \textbf{Matriz de Coeficientes}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} = X \quad \textbf{Matriz de Variables}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{vmatrix} = b \quad \textbf{Matriz de Parámetros}$$

De esta forma en forma matricial se puede escribir el sistema lineal como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

El procedimiento para escribir un Sistema Lineal en forma matricial se ilustra a través del ejemplo 3.1

Ejemplo 3.1
Escriba el siguiente sistema lineal de forma matricial

-2y + 4x + 3z +5w = 52
2w + 3x + 3y = 22
-5x + 4w = 12
4x + 2y – 3w + 2z = 11

Solución

Paso 1
Ordene el sistema lineal de acuerdo a un orden predeterminado de las variables: (Por ejemplo x, y, w, z)

4x - 2y + 5w + 3z = 52
3x + 3y + 2w + 0z = 22
-5x + 0y + 4w + 0z = 12
4x + 2y – 3w + 2z = 11

Paso 2
Determine la matriz de coeficientes como los valores que acompañan las variables x, y, w, z, ordenados por filas y columnas de acuerdo al sistema, para el ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Paso 3
Determine la matriz de variables como una matriz de n filas (número de variables) por una columna. Las variables ordenadas de acuerdo a lo predeterminado, para el ejemplo que se trata:

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{vmatrix}$$

Paso 4
Determine la matriz de parámetros como una matriz de n filas (número de ecuaciones) por una columna. Los parámetros de acuerdo al orden de las ecuaciones, para el ejemplo:

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 52 \\ 22 \\ 12 \\ 11 \end{vmatrix}$$

Paso 5
Exprese el sistema lineal como el producto de la matriz de coeficientes por la matriz de variables igualadas a la matriz de parámetros.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 52 \\ 22 \\ 12 \\ 11 \end{vmatrix}$$

Nótese que al multiplicar la matriz de coeficientes por la matriz de variables y al igualarla a la matriz de parámetros se vuelve a obtener el sistema lineal original.

2. La matriz escalona reducida por filas y la solución de los sistemas lineales

Si se considera la notación matricial de los sistemas lineales y la definición de matriz escalonada reducida por filas, se puede decir que si se logra convertir la matriz de coeficientes en una matriz escalonada reducida por filas, lo que al final se obtiene es un sistema lineal que puede ser fácilmente solucionado.

De otro lado, se puede probar que si **Ax** = **b** y **Cx** = **d,** son dos sistemas lineales, cada uno con **m** ecuaciones y **n** incógnitas y si las matrices aumentadas [**A**│**b**] y [**C**│**d**] de estos sistemas son equivalentes por filas, entonces ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones. Es decir que si se logra transformar la matriz aumentada [**A**│**b**] en una matriz escalonada reducida por filas [**C**│**d**], se puede afirmar que las soluciones de esta última son las soluciones de [**A**│**b**].

Con el fin de complementar lo anterior se define la matriz aumentada [**A**│**b**] como la matriz de coeficientes aumentada con la matriz de parámetros; así por ejemplo: la matriz aumentada para el sistema lineal del ejemplo 3.1 es:

Matriz Aumentada Ejemplo 3.1

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 5 & 3 & 52 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ -5 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right|$$

3. METODO GAUSS-JORDÁN PARA LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Este procedimiento, el cual también recibe el nombre de método Pívot, para resolver los sistemas lineales es el siguiente:

Paso 1

Escriba el Sistema Lineal en forma Matricial, es decir: **AX = b**

Paso 2

Formar la matriz aumentada [**A**│**b**]

Paso 3

Transformar la matriz aumentada a su forma *Escalonada Reducida por Filas* mediante operaciones elementales por fila.

Paso 4

El sistema lineal que corresponde a la matriz en forma escalonada reducida por filas obtenida en el paso 2 tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema dado.

Para cada fila distinta de cero de la matriz en forma escalonada reducida por filas, se despeja la incógnita a la entrada principal de la fila. Las filas compuestas solo de ceros se pueden ignorar pues la ecuación correspondiente será satisfecha por cualquier valor de las incógnitas.

A través de los ejemplos 3.2 se ilustra el procedimiento de GAUSS-JORDAN para solucionar sistemas lineales.

Ejemplo 3.2

Resolver el siguiente sistema lineal utilizando el Método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - \phantom{x_2 +{}} x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Paso 1

Escribir el sistema lineal en forma matricial

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Paso 2

Formar la matriz A aumentada con la matriz de parámetros, es decir: **A│b**

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right|$$

Paso 3

Transformar la Matriz Aumentada en una Matriz Escalona Reducida por Filas

Sub-paso 1 – En la matriz aumentada se determina la primera columna de izquierda a derecha donde no todos los coeficientes sean iguales a cero. A esta se le denomina columna PIVOT

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right|$$

Sub-paso 2 – La primera entrada diferente de cero de la columna PÍVOT se le denomina elemento PÍVOT.

1	2	3	9
2	-1	1	8
3	0	-1	3

Sub-paso 3 – En caso de que el elemento PÍVOT no corresponda a la primera fila, en este punto se intercambia de posición de la fila que contiene el elemento PÍVOT y la primera fila. Para el ejemplo no es necesario este paso ya que este se encuentra en la primera fila

Sub-paso 4 – En caso de que el elemento PÍVOT sea diferente de 1, multiplique la fila a la que pertenece el elemento PÍVOT por el inverso del elemento PÍVOT. Por ejemplo: sí el elemento PÍVOT fuera -5, toda la fila se multiplicaría por $^{1}/_{-5}$. Para el ejemplo no es necesario ya que el elemento PÍVOT es 1

Sub-paso 5 – Sumar múltiplos de la primera fila a las demás filas para asegurar que todos los elementos de la columna PÍVOT, excepto el PÍVOT, sean iguales a cero.Para el caso: Sumar a la segunda fila, menos dos veces la primera fila, con lo que la matriz transformada será:

1	2	3	9
0	-5	-5	-10
3	0	-1	3

Para el caso: Sumar a la tercera fila, menos tres veces la primera fila, de esta forma se obtiene:

1	2	3	9
0	-5	-5	-10
0	-6	-10	-24

Sub-paso 6 – Si todos los elementos de la columna PÍVOT son iguales a cero con excepción del elemento PÍVOT entonces se separa la fila del elemento PÍVOT, resultando así una submatriz.

1	2	3	9
0	-5	-5	-10
0	-6	-10	-24

Sub-paso 7 – Para la sub-matriz resultante repita los sub-pasos 1 a 5.

Sub-paso 1 – Para la Sub-Matriz se determina la primera columna de izquierda a derecha donde no todos los coeficientes sean iguales a cero. A esta se le denomina columna PIVOT.

1	2	3	9
0	-5	-5	-10
0	-6	-10	-24

Sub-paso 2 – La primera entrada diferente de cero de la columna PÍVOT se le denomina elemento PÍVOT. Para el ejemplo:

1	2	3	9
0	-5	-5	-10
0	-6	-10	-24

Sub-paso 3 – En caso de que el elemento PÍVOT no corresponda a la primera fila se intercambia las filas del elemento PÍVOT y la primera. En este caso no es necesario este paso

Sub-paso 4 – Se multiplica la fila PÍVOT por el inverso del elemento PÍVOT. Para el ejemplo: considerando que el PÍVOT es -5, entonces toda la fila se multiplicaría por $^{1}/_{-5}$.

1	2	3	9
0	1	1	2
0	-6	-10	-24

Sub-paso 5 – Sumar múltiplos de la primera fila a las demás filas para asegurar que todos los coeficientes de la columna PÍVOT, excepto el PÍVOT, sean iguales a cero. Es decir: Sumar a la segunda fila de la sub matriz, seis veces la primera fila:

1	2	3	9
0	1	1	2
0	0	-4	-12

Sub-paso 6 – Si todos los elementos de la columna PÍVOT son iguales a cero con excepción del elemento PÍVOT entonces se separa la fila del elemento PÍVOT, resultando así la siguiente submatriz

1	2	3	9
0	1	1	2
0	0	-4	-12

Sub-paso 7 – Para la sub-matriz resultante repita los sub-pasos 1 a 5.

Sub-paso 1 – Para la Sub-Matriz se determina la primera columna de izquierda a derecha donde no todos los coeficientes sean iguales a cero. A esta se le denomina columna PIVOT.

1	2	3	9
0	1	1	2
0	0	-4	-12

Sub-paso 3 – En caso de que el elemento PÍVOT no corresponda a la primera fila se intercambia las filas del elemento PÍVOT y la primera. En este caso no es necesario este paso

Sub-paso 4 – Se multiplica la fila PÍVOT por el inverso del elemento PÍVOT. Para el caso: considerando que el PÍVOT es -4, entonces toda la fila se multiplicaría por $^{1}/_{-4}$

1	2	3	9
0	1	1	2
0	0	1	3

Considerando que la matriz resultante todavía no es una matriz escalonada reducida por filas ya que hay columnas que contiene una entrada principal y el resto de las entradas de esas columnas no son iguales a cero se continúa con la transformación. Para esto restituimos de nuevo la matriz; es decir, se considera la matriz con las filas separadas.

Sub-paso 8 – Sumar múltiplos de las filas a las otras de tal forma que se anulen los elementos encima de las entradas principales.

Sumar menos dos veces la segunda fila a la primera fila, de lo cual resulta la matriz:

1	0	1	5
0	1	1	2
0	0	1	3

Sumar menos una vez la tercera fila a la segunda fila, de lo cual resulta la matriz:

1	0	1	5
0	1	0	-1
0	0	1	3

Sumar menos una vez la tercera fila a la primera fila, de lo cual resulta la matriz:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

Considerando que ya se tiene una Matriz Escalonada por Filas se puede pasar al paso siguiente.

Paso 4
Escriba la matriz aumentada en forma matricial

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Paso 5
Escriba el Sistema Matricial en forma lineal de nuevo:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

De acá se puede deducir que:
$x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 3$

---

4. SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES A TRAVÉS DE LA MATRIZ INVERSA.

De álgebra de matrices se tienen que si B es la inversa de A, entonces: $AB = I_n$ donde n x n es el orden de la matriz A y I es la matriz identidad.

También se sabe que B se puede denotar como A^{-1}, es decir que: $A.A^{-1} = I_n$.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, si A es una matriz de n x n, entonces el sistema lineal $A.x = b$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y si A es no singular, es decir: existe A^{-1}; se puede probar que:

$$\mathbf{x = A^{-1} b}$$

Prueba

Sea $A.x = b$ un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas. Multiplicar ambos lados de la ecuación por A^{-1}, entonces se obtiene: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$; considerando que $A^{-1}.A = I_n$, entonces se obtiene que: $x = A^{-1}b$

De esta forma, el procedimiento para resolver el sistema lineal $Ax = b$, a través de la matriz inversa es el siguiente:

Paso 1

Escribir el sistema lineal en forma matricial, es decir: **$Ax = b$**

Paso 2

A través del procedimiento descrito en la unidad 3 determine la matriz inversa de la matriz de coeficientes A, es decir halle A^{-1}.

Paso 3

Calcule los valores de x, como: $x = A^{-1}b$.

Restricción

Nótese que a diferencia del método de Gauss-Jordan, el método de la Matriz Inversa solo esta limitado a sistemas lineales donde el número de ecuaciones sea igual al número de las incógnitas.

A través del ejemplo 3.3 se ilustra el método de solución de los sistemas lineales a través de la matriz inversa

---

Ejemplo 3.3

Resolver el siguiente sistema lineal utilizando el método de la Matriz Inversa.

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 12 \\
2y + 3z &= -24 \\
5x + 5y + z &= 4
\end{aligned}
$$

Paso 1. Escribir el sistema lineal en forma matricial.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \\ -24 \\ 4 \end{vmatrix}
$$

Paso 2. A través del método de la matriz escalonada reducida determine $\mathbf{A^{-1}}$.

Compruebe que dicha matriz es:

$$
\begin{vmatrix} {}^{13}/_{8} & -{}^{1}/_{2} & -{}^{1}/_{8} \\ {}^{-15}/_{8} & ½ & {}^{3}/_{8} \\ {}^{5}/_{4} & 0 & -{}^{1}/_{4} \end{vmatrix}
$$

Paso 3. Calcule los valores de x, como: $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$.

$$
\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{13}/_{8} \\ {}^{-15}/_{8} \\ {}^{5}/_{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -{}^{1}/_{2} \\ ½ \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -{}^{1}/_{8} \\ {}^{3}/_{8} \\ -{}^{1}/_{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ -24 \\ 4 \end{vmatrix}
$$

Multiplicando las matrices y realizando la igualación se obtiene:

x = 31; y = -33; z = 14

---

5. SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES A TRAVÉS DE LA LEY DE CRAMER. (Regla de CRAMER)

Sea un sistema lineal de **n** ecuaciones con **n** incógnitas, como el que se indica.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned} \qquad (1)$$

Si **A** es la matriz de coeficientes, **x** la matriz de variables y **b** la matriz de parámetros de modo que se pueda escribir el sistema de forma matricial como:

Ax = b; se puede probar que si el **Det (A)** $\neq$ **0**, entonces el sistema tiene una única solución que se puede determinar como:

$x_1 = (\mathrm{Det}(A_1)) / (\mathrm{Det}(A))$;

$x_2 = (\mathrm{Det}(A_2)) / (\mathrm{Det}(A))$

$x_3 = (\mathrm{Det}(A_3)) / (\mathrm{Det}(A))$

… … …

$x_i = (\mathrm{Det}(A_i)) / (\mathrm{Det}(A))$

Donde A_i es la matriz resultante de remplazar la i-exima columna de **A** por la matriz **b.**

El procedimiento para resolver el sistema lineal **Ax** = **b,** a través de la regla de Cramer, es el siguiente:

Paso 1 Escribir el sistema lineal en forma matricial, es decir: **Ax** = **b**

Paso 2 Calcule el determinante de **A**

Paso 2a Si el **Det (A) = 0,** el sistema no tiene una única solución

Paso 2b Si el **Det (A)** $\neq$ **0,** continué con los siguientes pasos:

Paso 3 Forme las matrices **(A_i),** remplazando la columna i por la matriz **b** en la matriz **A**

Paso 4 Calcule los determinantes de **(A_i)**

Paso 5 Determine los valores de x_i como $(\mathrm{Det}(A_i)) / (\mathrm{Det}(A))$

Restricción

Nótese que igual que en el método de la Matriz inversa, esta regla solo esta limitada a sistemas lineales donde el número de ecuaciones sea igual al número de las incógnitas.

A través del ejemplo 3.4 se ilustra la forma de solucionar un sistema lineal por el Método de CRAMER.

Ejemplo 4-9
Resolver el siguiente sistema lineal utilizando la Regla de CRAMER

$2x + 3y + 3z = 2$
$x + 2y + z = 0$
$4x + 2y + z = 1$

Solución

Paso 1. Escribir el sistema lineal en forma matricial, es decir **Ax** = **b**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Paso 2. Calcule el determinante de A.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right|$$

det A = = [(2x2x1) + (3x1x4) + (3x1x2)] **-** [(3x1x1) + (2x1x2) + (3x2x4)] = -9

Paso 3. Forme las matrices **(A_i),** remplazando la columna i de la matriz A por la matriz **b**.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Paso 4 Calcule los determinantes de **(A_i)**.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \det A_1 = -3$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \det A_2 = 7$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \det A_3 = -11$$

Paso 5 Determine los valores de $\mathbf{x_i}$ como (**Det(A_i)**) / (**Det(A)**)

x = (-3/-9) = (1/3)

y = (7/-9) = (-7/9)

z = (-11/-9) = (11/9)

---

6. SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP[2]

La solución de ecuaciones a través de Microsoft Excel se limita a aquellos sistemas donde el número de incógnitas coincide con el número de de ecuaciones. En este caso, como se ha visto en los apartados anteriores se pueden solucionar a través de tres métodos:

- ✓ El método de la matriz Inversa, el cual define que si Ax = b, es un sistema lineal escrito en forma matricial, entonces $x = A^{-1}b$. En este caso se puede utilizar las funciones de EXCEL: Inversa de una matriz y Multiplicación de matrices.
- ✓ El método de la Regla de Cramer el cual define que si Ax = b; es un sistema lineal escrito en forma matricial, y si det(A) es diferente de cero, entonces:

  $x_1 = \mathrm{Det}(A_1) / \mathrm{Det}(A)$

  $x_2 = \mathrm{Det}(A_2) / \mathrm{Det}(A)$

  $x_n = \mathrm{Det}(A_n) / \mathrm{Det}(A)$

  Donde: A_i es la matriz que resulta de remplazar la columna i por la matriz b en la matriz de coeficientes. En este caso se utiliza la función EXCEL determinante de una Matriz

---

[2] Copyright© Microsoft Corporation 1985-2001

Unidad II
Programación Lineal

Unidad II
Programación Lineal

Contenido

Introducción
El Modelo Matemático de programación lineal
Planteamiento de los modelos de Programación lineal
Método grafico para la solución de los modelos de programación lineal
Método SIMPLEX para la solución de los modelos de programación lineal
Problema Dual
Solución de modelos de Programación Lineal con Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP

Objetivos

Relacionar los problemas de asignación de recursos a los modelos de Programación Lineal.
Representar los problemas de la vida empresarial a través de un modelo de Programación Lineal.
Resolver modelos de Programación Lineal de dos variables a través de un método grafico.
Clasificar los modelos de Programación Lineal en Canónicos y no Canónicos.
Resolver modelos de Programación Lineal a través del método Símplex
Interpretar los resultados de un modelo de Programación Lineal para tomar la mejor decisión que optimiza la utilización de los recursos de una compañía.
Utilizar Microsoft EXCEL para la solución de los modelos de Programación lineal

INTRODUCCIÓN

En las diferentes áreas de la empresa se realizan iniciativas conducentes al logro de los objetivos y las metas; para realizar estas actividades se requieren recursos los cuales usualmente son escasos; por esta razón, el administrador requiere de herramientas para realizar la asignación óptima de estos recursos. La Programación Lineal es una poderosa herramienta que permite modelar y resolver matemáticamente este problema; es decir: una herramienta que trata el problema de la asignación óptima de los recursos en la empresa.

1. EL MODELO MATEMÁTICO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El modelo matemático que expresa de manera general el problema de Programación Lineal es la que se muestra en (1). El problema plantea encontrar los valores de $\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_n}$ que hacen que se maximice o minimice la función lineal Z, sujetos a una o varias restricciones

Maximizar (Minimizar)	$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$	
Sujeta a:	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ ($\leq$) ($\geq$) (=) b_1 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$ ($\leq$) ($\geq$) (=) b2 . . . . $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$ ($\leq$) ($\geq$) (=) b_m	**(1)**
Siendo:	$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$	

Los componentes del modelo se pueden identificar así:

Función Objetivo: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Constantes: a_{ij}, b_i **y** c_i

Variables de decisión: $x_1, x_2, \ldots. x_n$

Restricciones, funciones del tipo: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ ($\leq$) ($\geq$) (=) b_1

De esta forma el modelo se puede interpretar así: dadas n actividades, las variables de decisión $x_1, x_2, \ldots. x_n$ representan los niveles a que se llevan a cabo las actividades, Z denota la medida de efectividad escogida. Los valores de $\mathbf{c_j}$ expresan el aumento en la medida de efectividad proveniente de un aumento en la unidad de $\mathbf{x_j}$. Además, $\mathbf{b_i}$ representa la cantidad de recurso **i** disponible para usar en las **n** actividades y $\mathbf{a_{ij}}$ denota la cantidad de insumo o recurso **i** del que hace uso la actividad **j**. Por lo tanto, el lado derecho de las restricciones significa el uso total de los insumos respectivos. Las últimas restricciones evitan la posibilidad de que existan niveles de actividades negativos.

Cuando el modelo toma la forma (2) se denomina modelo Canónico de Programación Lineal.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\textbf{Sujeta a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \\
\qquad\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b2 & \textbf{(2)} \\
\qquad\qquad\quad \vdots & \\
\qquad\qquad\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m & \\
\textbf{Siendo:} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

En los siguientes ejemplos se ilustra esta definición

Ejemplo 1.1

Diga si el siguiente modelo de Programación Lineal es canónico o no, en este último caso explique porque.

Maximizar	$Z = 6x_1 + 3x_2 + 8x_3$
Sujeta a:	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$
	$5x_1 + 6x_2 \geq 33$
Siendo:	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solución.
No corresponde a un modelo Canónico ya que la segunda restricción tiene la forma $\geq$ en vez de $\leq$, como debería ser.

Ejemplo 1.2

Diga si el siguiente modelo es canónico o no, en este último caso explique porque.

Minimizar	$Z = 6x_1 + 3x_2 + 8x_3$
Sujeta a:	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$
	$5x_1 + 6x_2 \leq 33$
Siendo:	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solución

No corresponde a un modelo Canónico ya que se trata de minimizar la función objetivo, diferente a la forma canónica que exige que esta se maximice

---

2. PLANTEAMIENTO DE LOS MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

La representación de un problema de la vida real a través de un modelo matemático requiere desarrollar habilidades y destrezas las cuales solo pueden ser adquiridas a través de un trabajo metódico y disciplinado.

Una guía que ayudará a desarrollar estas habilidades y destrezas para el planteamiento de modelos de programación lineal es la que se ha venido utilizando para la solución de los problemas administrativos, es decir:

Paso 1 Entendimiento del problema
Paso 2 Definición de variables
Paso 3 Formulación del modelo
Paso 4 Solución del modelo y
Paso 5 Comprobación de la solución

Independiente de lo anterior se recomiendan las siguientes prácticas, en especial cuando se trata de modelar a través de la técnica de Programación Lineal.

- ✓ Describa en palabras el objetivo que se busca al resolver el problema y las restricciones a tener en cuenta.
- ✓ Identifique y defina las variables de decisión asociadas al problema. En esta definición deben incluirse las unidades de medida de las variables; por ejemplo: toneladas, metros, unidades, etcétera.
- ✓ Identifique los coeficientes de contribución (los $\mathbf{c}_j$ del modelo (1)) asociados a las variables de decisión
- ✓ Plantear la función objetivo teniendo presente que haya coherencia entre las unidades de medición
- ✓ Identificar la tasa física de los coeficientes de utilización del recurso (los $\mathbf{a}_{ij}$ del modelo (1)). Debe tenerse en cuenta las unidades de medición relacionadas con el coeficiente respectivo.
- ✓ Identificar los recursos o requerimientos respectivos, es decir los valores de $\mathbf{b}_i$ del modelo (1), incluyendo las unidades de medición asociadas a ellos.

- ✓ Plantear las restricciones relacionadas con cada recurso o requerimiento, verificando que haya coherencia entre las unidades de medición
- ✓ Definir las condiciones de no negatividad asociadas a las variables de decisión.

Tipos de problemas

Son muchos los problemas de las distintas áreas funcionales de la empresa que pueden modelarse y solucionarse a través de la Programación Lineal; no obstante, aquí se hará referencia a los problemas de tipo administrativo y financiero.

De esta forma los problemas que se abordarán serán del tipo:

a. Problemas relacionados con la producción
b. Problemas relacionados con la planeación del personal
c. Problemas relacionados con asuntos financieros.
d. Problemas relacionados con la mercadotecnia
e. Problemas relacionados con aplicaciones contables

Problemas relacionados con la producción

En este caso, a través de los modelos de programación Lineal, los administradores de las empresas tratan los problemas relacionados con la planeación de la producción, la asignación de recursos para la producción, los niveles de producción, capacidad de producción, asignación de mano de obra, almacenamiento de materias primas y productos terminados; es decir, todos aquellos asuntos que conducen a la minimización de los costos y/o la maximización de utilidades. El ejemplo 1.3 ilustra este tipo de problemas.

Ejemplo 1.3
Una empresa manufacturera de artículos plásticos de cocina ha descontinuado la producción de baldes por considerar que dicha línea ha dejado de ser rentable. Considerando esta decisión se pone a disposición de la gerencia de producción una maquina de vaciado de plástico, una fresadora y una marcadora. La gerencia ha determinado que estas maquinas se pongan a disposición de la producción de Jarras de Agua, Vasos y Platos plásticos de uso industrial.

Se ha calculado que la disponibilidad de las maquinas es la siguiente:

Tipo de maquina	Tiempo disponible

	Horas Máq./Semana
Máq. Vaciado Plástico	280
Fresadora	420
Marcadora	560

Por su parte, el departamento de ventas ha determinado que la toda la producción de los Vasos y Platos se venderá y que las Jarras de agua se venderán a lo máximo 60 unidades por semana. También determinaron que las utilidades por la venta de Vasos, Platos y Jarras es de 30, 10 y 15 pesos por unidad vendida.

Por su parte el departamento de producción ha determinado que la utilización de las maquinas por unidad de producto, son los siguientes:

Productividad (Horas Máquina / Unidad)

Tipo de Maquina	Vasos Industriales	Platos Industriales	Jarras de Agua
Máq. Vaciado de plástico	9	3	4
Fresadora	4	2	4
Marcadora	5	0	3

Se pide formular un modelo de Programación Lineal para determinar que tanto de cada uno de los productos debe la firma producir de manera que se maximice la ganancia

Solución:

Definición de variables

Sea: x = Número de unidades de vasos producidos por semana
y = Número de unidades de platos producidos por semana
w = Número de unidades de jarras producidas por semana
Z = Ganancias

Formulación del Modelo

La Función Objetivo corresponde a la maximización de las utilidades a partir del aporte de cada producto. Es decir:

Utilidad por Vaso: 30; Utilidad total por venta de vasos: 30x
Utilidad por Plato: 10; Utilidad total por venta de Platos: 10y
Utilidad por Jarra: 15; Utilidad total por venta de vasos: 15w

De esta forma la función Objetivo, será:

Maximizar Z = 30x + 10y + 15w

Restricciones:
Existen algunas restricciones en cuanto a la capacidad de producción, estas son:

Tiempo de uso de la maquina de vaciado para la producción de los Vasos 9x
Tiempo de uso de la maquina de vaciado para la producción de los Platos 3y
Tiempo de uso de la maquina de vaciado para la producción de los Jarras 4w

Considerando que la disponibilidad de la maquina de vaciado es de 280 h/s, entonces se debe cumplir que:

$9x + 3y + 4w \leq 280$

Tiempo de uso de la fresadora para la producción de los Vasos 4x
Tiempo de uso de la fresadora para la producción de los Platos 2y
Tiempo de uso de la fresadora para la producción de los Jarras 4w

Considerando que la disponibilidad de la fresadora es de 420 h/s; entonces se debe cumplir que:

$4x + 2y + 4w \leq 420$

Tiempo de uso de la Marcadora para la producción de los Vasos 5x
Tiempo de uso de la Marcadora para la producción de los Platos 0y
Tiempo de uso de la Marcadora para la producción de los Jarras 3w

Considerando que la disponibilidad de la maquina de marcado es de 560 h/s; entonces se debe cumplir que:

$5x + 0y + 3w \leq 560$

Además existe una restricción comercial; ella explica que las Jarras se venderán como máximo 60 unidades por semana, lo cual se puede expresar matemáticamente, como:

$w \leq 60$

Además considerando que no pueden existir producciones negativas:

$x, y, w \geq 0$

De esta manera el modelo que permite representar el problema será:

Maximizar **$Z = 30x + 10y + 15w$** (Función Objetivo)
Sujeto a:

$$\begin{aligned} 9x + 3y + 4w &\leq 280 \\ 4x + 2y + 4w &\leq 420 \\ 5x + 0y + 3w &\leq 560 \\ w &\leq 60 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución del Modelo

La solución del modelo se realizará más adelante una vez sean estudiadas las diferentes metodologías para la solución de los modelos de Programación Lineal.

Problemas relacionados con la planeación del personal

En este caso los administradores utilizan los modelos de Programación Lineal para planificar los tiempos de mano de obra o el número de empleados por turno con el fin de minimizar la cantidad de personas; es decir minimizar los costos.

En el ejemplo 1.4 se ilustra este tipo de problemas

Ejemplo 1.4
Un taller de emergencias automovilísticas esta abierto al publico las 24 horas del día. El gerente requiere contratar la cantidad mínima de personas posible de tal manera que se distribuya en 6 periodos de 4 horas, como se muestra en la siguiente tabla:

Periodo	Duración de cada	Número mínimo de personas

	periodo	requerido por periodo
1	6:00 a.m – 10 a.m	12
2	10:00 a.m – 2:00	18
3	2:00 p.m – 6:00	22
4	6:00 p.m – 10:00	20
5	10:00 p.m – 2:00	10
6	2:00 p.m – 6:00	8

Los turnos de trabajo son de 8 horas seguidas y hay rotación de personal cada 4 horas, es decir 6 cambios posibles de turno en el transcurso del día.

Solución

Definición de variables

Los empleados que entran a trabajar a la 6:00 a.m cubren los turnos 1 y 2, los que entran a las 10:00 cubren los turnos 2 y 3, los que ingresan a las 2:00 p.m cubren los turnos 3 y 4 y así sucesivamente. De esta forma podemos definir las variables así:

$\mathbf{x_1}$: número de empleados en los periodos 1 y 2
$\mathbf{x_2}$: número de empleados en los periodos 2 y 3
$\mathbf{x_3}$: número de empleados en los periodos 3 y 4
$\mathbf{x_4}$: número de empleados en los periodos 4 y 5
$\mathbf{x_5}$: número de empleados en los periodos 5 y 6
$\mathbf{x_6}$: número de empleados en los periodos 6 y 1

Formulación del Modelo
La Función Objetivo corresponde a la minimización de la suma de los empleados que ingresan por período. Es decir:

Minimizar $\mathbf{Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}$

Restricciones:
Las restricciones tienen que ver con el número mínimo de personas que son requeridas por período y la relación de ellas con las personas que ingresan por turno a cubrir el trabajo. En la siguiente tabla se muestra dicha relación

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Período	**6:00-10:00**	**10:00-14:00**	**14:00-18:00**	**18:00-22:00**	**22:00-2:00**	**2:00-6:00**
	x_1	x_1				
		x_2	x_2			
			x_3	x_3		
				x_4	x_4	
					x_5	x_5
	x_6					x_6
Número mínimo de Empleados	**12**	**18**	**22**	**20**	**10**	**8**

De la tabla podemos deducir que las restricciones son:

$x_1 + x_6 \geq 12$
$x_1 + x_2 \geq 18$
$x_2 + x_3 \geq 22$
$x_3 + x_4 \geq 20$
$x_4 + x_5 \geq 10$
$x_5 + x_6 \geq 8$

De esta forma el modelo de Programación Lineal que representa el problema es:

Minimizar $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

Sujeto

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 12 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geq 18 \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geq 22 \\
x_3 + x_4 \qquad &\geq 20 \\
x_4 + x_5 &\geq 10 \\
x_5 + x_6 &\geq 8 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución del Modelo

La solución del modelo se vera más adelante una vez sean estudiadas las diferentes metodologías para la solución de los modelos de Programación Lineal.

Problemas relacionados con asuntos financieros

En estos casos el administrador representa problemas relacionados con la recolección de cartera, selección del portafolio de inversiones, costos financieros, entre otros con el fin de maximizar el rendimiento o minimizar los riesgos. En el ejemplo 1.5 se ilustra el planteamiento de este tipo de problemas.

Ejemplo 1.5

El Fondo de Empleados de la FUNLAM tuvo durante el año 2005 un Superávit Financiero que le ha reportado utilidades por $200´000.000. Con el fin de fortalecer financieramente el Fondo se ha decidido no repartir estas utilidades y de esta manera la junta directiva le ha pedido al gerente que prepare una recomendación de inversión para los $200´000.000. La junta ha sugerido diversificar la Inversión a través de un portafolio que incluya: certificados de depósito, bonos de tesorería, acciones con buen historial, acciones especulativas, bonos de compañías y bienes raíces.

No obstante, la junta pone de manifiesto que le gustaría tener un periodo promedio ponderado de inversión de al menos cinco años. También ha señalado que el factor promedio ponderado de riesgo no debe ser superior a 0.20. Los estatutos del fondo prohíben que se invierta más del 25% de las inversiones del Fondo en bienes raíces y acciones especulativas. ¿Qué recomendación debe hacer el gerente si se pretende maximizar el rendimiento sobre la inversión?

El gerente con la ayuda de un asesor financiero ha estimado un rendimiento anual para cada clase de inversión y asimismo, ha desarrollado un factor de riesgo para cada una de ellas que señala la probabilidad de que el rendimiento real de las inversiones en esa clase sea inferior al rendimiento esperado. Por último, ha elaborado un pronóstico del número promedio de años en que se espera obtener el rendimiento esperado para la clase respectiva de inversión. Esta información se presenta en la siguiente tabla.

Clases de Inversión	**Rendimiento Esperado anual (%)**	**Factor de Riesgo**	**Plazo promedio de la Inversión**
Certificados de deposito	8.5	0.02	8
Bonos de Tesorería	9.0	0.01	2
Acciones (buen historial)	8.5	0.38	5
Acciones especulativas	14.3	0.45	6
Bonos de compañías	6.7	0.07	2
Bienes raíces	13.0	0.35	4

Solución

Definición de variables

El objetivo consiste en determinar la proporción de los $200´000.000 que deben invertirse en cada una de las seis iniciativas de inversión de manera que se maximicen el rendimiento. Ya que existen seis clases de inversiones, se requieren seis variables:

x_1 : Porcentaje del capital invertidos en Certificados de deposito
x_2 : Porcentaje del capital invertidos en Bonos de Tesorería
x_3 : Porcentaje del capital invertidos en Acciones de buen historial
x_4 : Porcentaje del capital invertidos en Acciones especulativas
x_5 : Porcentaje del capital invertidos en Bonos de compañías
x_6 : Porcentaje del capital invertidos en Bienes raíces

Formulación del Modelo

La Función Objetivo corresponde a la maximización de las utilidades, las cuales a su vez son la suma de las utilidades en proporción a cada inversión, es decir:

Maximización $Z = 8.5x_1 + 9.0x_2 + 8.5x_3 + 14.3x_4 + 6.7x_5 + 13x_6$

Restricciones:
Las restricciones tienen que ver con los limitantes que exigen la Junta directiva y los estatutos del fondo.

<u>Restricción de inversión</u>: la suma de las proporciones de las inversiones debe ser igual a 1, es decir:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$

<u>Restricción por factor de riesgo</u>
Puesto que las variables corresponden a proporciones de la inversión, el producto del factor de riesgo por la variable asociada da como resultado el riesgo ponderado de la inversión el cual debe ser menor o igual 0.2. Es decir:

$0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.38x_3 + 0.45x_4 + 0.07x_5 + 0.35x_6 \leq 0.20$

Restricción del periodo de inversión
Igual que en caso anterior el plazo promedio de la proporción de inversiones es igual a la suma de los plazos promedio por la variable y dicha suma de acuerdo a las condiciones debe ser mayor o igual a 5 años.

$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 4x_6 \geq 5$$

Restricción legal
La suma de las proporciones de las inversiones en acciones especulativas x_4 y bienes raíces x_6 debe ser menor o igual al 25%, es decir:

$$x_4 + x_6 \leq 0.25$$

De esta manera el modelo de Programación Lineal que representa el problema es el siguiente:

Maximización $Z = 8.5x_1 + 9.0x_2 + 8.5x_3 + 14.3x_4 + 6.7x_5 + 13x_6$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
0.02x_1 + & 0.01x_2 + & 0.38x_3 + & 0.45x_4 + & 0.07x_5 + & 0.35x_6 & \leq 0.20 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 + & x_6 & = 1 \\
8x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 + & 6x_4 + & 2x_5 + & 4x_6 & \geq 5 \\
 & & & x_4 + & & x_6 & \leq 0.25 \\
 & & & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

Solución del Modelo

La forma de solucionar el modelo se vera más adelante cuando sean estudiadas las diferentes metodologías para la solución de los modelos de Programación Lineal

---

Problemas relacionados con la mercadotecnia

Los modelos de Programación Lineal en este caso permiten al administrador la selección de medios de publicidad, asignar presupuestos, entre otros asuntos, con el fin de maximizar la audiencia y/o minimizar los costos. En el ejemplo 1.6 se ilustra el planteamiento de este tipo de problemas.

Ejemplo 1.6

El área de mercadotecnia de la compañía "*Hernando Calle*" aplica Programación Lineal al problema de la selección de medios de publicidad, el cual consiste básicamente en la asignación del presupuesto de publicidad en diversos medios de comunicación buscando maximizar la exposición de sus anuncios.

Los administradores de "*Hernando Calle*" han decidido invertir hasta $380´000.000 en publicidad para anunciar sus Trajes Ejecutivos. A través de un estudio de mercado se ha logrado determinar que sus clientes están compuestos en su mayor parte por hombres entre 25 y 55 años de edad, que tienen ingresos superiores a los $5´000.000 y con estudios universitarios. A partir de estos descubrimientos, el grupo de investigación de mercados ha decidido que las características de los clientes tienen una importancia relativa de acuerdo con las siguientes ponderaciones:

Características del Cliente	**Ponderaciones**
Edad (25-55 años)	0.40
Ingresos (5´000.000 o más)	0.35
Educación Universitaria	0.2

Los administradores del departamento de mercadotecnia han decidido utilizar los servicios de una agencia de publicidad para que les ayude a desarrollar un plan de publicidad que les permita alcanzar al cliente potencial en forma más efectiva. Después de estudiar los datos de características de los clientes, la agencia de publicidad ha sugerido que la compañía considere colocar publicidad en las revistas Clase Ejecutiva, Dinero y Semana. En la siguiente tabla se señala las características de los consumidores de las tres revistas.

Características de los lectores de las revistas

Características del Cliente	Porcentaje de Consumidores		
	Clase Ejecutiva	Dinero	Semana
Edad (25-55 años)	40	70	60
Ingresos (5´000.000 o más)	60	50	40
Educación Universitaria	30	20	60
Circulación Revista	780.000	940.000	1´250.000

La agencia de publicidad ha indicado a los administradores de "*Hernando Calle*" que una meta apropiada sería maximizar el número de exposiciones efectivas, es decir que el objetivo no debe ser maximizar el número de exposiciones para todos los lectores de la publicidad, sino más bien, maximizar el número de clientes potenciales que se exponen a la publicidad. Para desarrollar un factor efectivo de exposición, debe calcularse un *índice de lectura* para cada revista. El índice de lectura se calcula sumando los productos del porcentaje de lectores que tienen una característica determinada (edad, ingresos o educación) y el peso que la compañía ha asignado a esa característica. Por ejemplo, r_A, el índice para la revista Clase ejecutiva, es:

r_A = (0.40)(40%) + (0.35)(60%) + (0.20)(30%) = 0.430

Así, el índice de lectura es un promedio ponderado de los porcentajes característicos de lectura para la Revista respectiva.

La agencia de publicidad ha señalado que debe elaborarse un *coeficiente de efectividad,* ***e****,* para los lectores, multiplicando el índice de lectura de cada revista por su respectiva audiencia. Para la revista Clase Ejecutiva, el coeficiente de efectividad es:

e_A = (0.430) (780.000) = 335.400

Por último, la *exposición efectiva, E,* por anuncio se determina dividiendo el Coeficiente de Efectividad por el Costo del anuncio. La agencia indica que el costo por anuncio en las tres revistas es \$500.000, \$750.000, y \$800.000 respectivamente; por tanto la exposición efectiva para la revista Clase Ejecutiva es:

E_A = (335.400)/(500.000) = 0.6708 por $ invertida.

De análisis y estudios conjuntos de "Hernando Calle" y la agencia de publicidad, se ha decidido que el número máximo de anuncios que debe colocarse en cada revista es 36, 40 Y 45, en las revistas Clase Ejecutiva, Dinero y Semana respectivamente. Además, se ha decidido que deben colocarse cuando menos nueve anuncios en la revista Clase Ejecutiva y cuando menos cinco en la revista Semana.

Es necesario determinar el número de $ de publicidad que debe invertirse en cada revista para maximizar la exposición efectiva, y determinar también el número de anuncios que debe colocarse en cada revista.

Solución

Definición de variables
$\mathbf{x}_1$: $ Pesos que se invierten en anuncios en la revista Clase Ejecutiva
$\mathbf{x}_2$: $ Pesos que se invierten en anuncios en la revista Dinero
$\mathbf{x}_3$: $ Pesos que se invierten en anuncios en la revista Semana

Formulación del Modelo
La función objetivo calculando la efectividad de exposición para cada una de las revistas.

Efectividad de la exposición Revista Clase ejecutiva:
r_A = (0.40)(40%) + (0.35)(60%) + (0.20)(30%) = 0.430

Efectividad de la exposición Revista Dinero:
r_B = (0.40)(70%) + (0.35)(50%) + (0.20)(20%) = 0.495

Efectividad de la exposición Revista Semana:
r_C = (0.40)(60%) + (0.35)(40%) + (0.20)(60%) = 0.500

Con estos factores se pueden, a su vez, calcular los coeficientes de efectividad, así:
Coeficiente de efectividad de la Revista Clase ejecutiva
e_A = (0.430) (780.000) = 335.400

Coeficiente de efectividad de la Revista Dinero
e_B = (0.495) (940.000) = 465.300

Coeficiente de efectividad de la Revista Semana
e_C = (0.500) (1´250.000) = 625.000

Finalmente dividiendo los coeficientes de efectividad por el costo por anuncio, puede calcularse la efectividad de la exposición para las revistas:

Exposición efectiva para la revista Clase Ejecutiva

E_A = (335.400)/(500.000) = 0.6708 por $ invertido

Exposición efectiva para la revista Dinero

E_B = (465.300)/(750.000) = 0.6204 por $ invertido

Exposición efectiva para la revista Semana

E_C = (625.000)/(800.000) = 0.7812 por $ invertido

Dado que las variables de decisión se expresan en $ pesos invertidos en anuncios en las revistas respectivas, la función objetivo es:

Maximización Z = 0.6708x_1 + 0.6204x_2 + 0.7812x_3

Restricciones:

1. Cantidad total disponible para publicidad. $x_1 + x_2 + x_3 \leq$ 380´000.000
2. Máximo de anuncios en la revista Clase Ejecutiva. (x_1) / (500.000 por anuncio) $\leq$ 36
3. Máximo de anuncios en la revista Dinero. (x_2) / (750.000 por anuncio) $\leq$ 40
4. Máximo de anuncios en la revista Semana. (x_3) / (800.000 por anuncio) $\leq$ 45

5. Mínimo de anuncios en la revista Clase Ejecutiva. ($\mathbf{x}_1$) / (500.000 por anuncio) $\geq$ 9
6. Mínimo de anuncios en la revista Semana. ($\mathbf{x}_1$) / (800.000 por anuncio) $\geq$ 5

De acuerdo a lo anterior el modelo de Programación Lineal que representa el problema es el siguiente:

Maximización $\quad \mathbf{Z = 0.6708x_1 + 0.6204x_2 + 0.7812x_3}$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{lllr}
x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq 380´000.000 \\
(^1/_{500.000})\, x_1 & & & \leq 36 \\
& (^1/_{750.000})\, x_2 & & \leq 40 \\
& & (^1/_{800.000})\, x_3 & \leq 45 \\
(^1/_{500.000})\, x_1 & & & \geq 9 \\
& & (^1/_{800.000})\, x_3 & \geq 5 \\
& & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Solución del Modelo

La forma de solucionar el modelo se vera más adelante cuando sean estudiadas las diferentes metodologías para la solución de los modelos de Programación Lineal

---

Problemas relacionados con la Contabilidad de Costos

A través del ejemplo 1.7 se ilustra la utilización de los modelos de Programación Lineal en la solución de los problemas relacionados con la Contabilidad de Costos

---

Ejemplo 1.7

La Cadena de Restaurantes J&K produce tres tipos de platos de comida ejecutivos en tres restaurantes. Los platos son: Ejecutivo Súper Especial, Ejecutivo Especial y Ejecutivo Corriente. El departamento de contabilidad y costos de la cadena de restaurantes ha recopilado la siguiente información sobre los costos de los productos.

CADENA DE RESTAURANTES J&K

Tipo de Comida (Valores en pesos)			
Características	Plato Ejecutivo Corriente	Plato Ejecutivo Especial	Plato Ejecutivo Súper Especial
Precio de venta	8.000	10.000	15.000
Costo variable	4.500	5.200	7.000
Resultado Neto	3.500	4.800	8.000
Cantidad de ventas	120	80	60
Ventas	960.000	800.000	900.000
Costos variables	540.000	416.000	420.000
Costos fijos	150.000	220.000	250.000
Costo total	690.000	636.000	670.000
Utilidad	270.000	164.000	230.000

Teniendo en cuenta que los costos fijos se asignan de acuerdo con las horas de mano de obra que se requieren para la producción de cada plato; que el tiempo disponible en cada uno de los restaurantes (1,2 y 3) son de 280, 320 y 380 horas de mano de obra respectivamente, y que la producción de cada plato, por restaurante, demanda las horas de producción que se indican en la siguiente tabla.

Tipo de Comida			
Restaurante	Plato Ejecutivo Corriente	Plato Ejecutivo Especial	Plato Ejecutivo Súper Especial
Restaurante 1	2	3	4
Restaurante 2	3	4	5
Restaurante 3	1	2	4

El gerente de la cadena quiere conocer que cantidad de producción de unidades de cada plato es necesaria para maximizar la contribución marginal total sujeto a la mano de obra utilizada en cada uno de ellos

Solución

Definición de variables
$\mathbf{x}_1$: Número de platos Ejecutivos Corrientes
$\mathbf{x}_2$: Número de platos Ejecutivos Especiales
$\mathbf{x}_3$: Número de platos Ejecutivos Súper Especiales

Formulación del Modelo
Lo primero es calcular la contribución marginal de cada plato dependiendo de las variables de decisión $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, y $\mathbf{x}_3$

	Plato Ejecutivo Corriente	Plato Ejecutivo Especial	Plato Ejecutivo Súper Especial
Utilidad Neta	270.000	164.000	230.000
Costo Fijos	150.000	220.000	250.000
Contribución Marginal	420.000	384.000	480.000

En el cuadro anterior se calcula la contribución marginal de los tres platos, a partir de ahí podemos calcular la contribución marginal unitaria de cada plato de la siguiente manera:

Contribución Marginal Unitaria = (Contribución Marginal) / (Cantidad de ventas)

Plato Ejecutivo corriente = (420.000) / (120) = 3.500

Plato Ejecutivo Especial = (384.000) / (80) = 4.800

Plato Ejecutivo Súper Especial = (480.000) / (60) = 8.000

Función Objetivo

En considerando a lo que requiere el gerente, entonces se necesita:

Maximización $Z = 3500x_1 + 4800x_2 + 8000x_3$

Restricciones

Para el restaurante 1, tenemos: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 280$

Para el restaurante 2, tenemos: $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 320$

Para el restaurante 3, tenemos: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 380$

De otro lado las cantidades de producción de los platos deben ser positivas, es decir que:

x_1 , x_2 , y $x_3 \geq 0$

De acuerdo a lo anterior el modelo de Programación Lineal que representa el problema es el siguiente:

Maximización $Z = 3500x_1 + 4800x_2 + 8000x_3$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 280 \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 320 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 380 \\
x_1 , x_2 , x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución del Modelo

La forma de solucionar el modelo se vera más adelante cuando sean estudiadas las diferentes metodologías para la solución de los modelos de Programación Lineal

3. MÉTODO GRÁFICO PARA LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Para resolver modelos de Programación Lineal de dos variables es posible utilizar, igual que se hizo con los sistemas lineales, un método gráfico. Aunque el procedimiento es limitado ya que no sirve para resolver problemas con más de dos variables, resulta útil para ilustrar tanto el proceso de solución de problemas lineales; como las características de dicha solución.

Los pasos a seguir en la solución del modelo por este método son los siguientes:

Paso 1. Graficar las restricciones y definir la región factible

Paso 2. Determinar los vértices de la región factible.

Paso 3. Evaluar los vértices en la función objetivo y seleccionar la solución óptima. Esto en consideración a que se puede demostrar que la función objetivo se maximiza o minimiza en los vértices de la región factible.

El método se ilustra a través del ejemplo 1.8

Ejemplo 1.8

Un pequeño fabricante de productos fotográficos prepara cada día dos tipos de reveladores de película FINO y EXTRAFINO. Para ello utiliza las soluciones A y B. Un cuarto de revelador FINO contiene 20 onzas de solución A y 10 onzas de solución B y el revelador EXTRAFINO contiene 10 onzas de A y 20 onzas de B. Las ganancias por cada cuarto de FINO es de $800 y la de un cuarto de EXTRAFINO es de $1000.

Si la empresa dispone a diario de 500 onzas de solución A y 700 de solución B, se pide hallar el número total de cuartos de FINOS y EXTRAFINOS que debe producir para maximizar su ganancia.

(Suponga que el productor puede vender todo lo que se fabrica)

Resolver el modelo resultante por el método gráfico.

Solución

Definición de variables

Sea: **x** = Número de cuartos de revelador FINO a producir
y = Número de cuartos de revelador EXTRAFINO a producir
Z = Ganancias

Formulación del Modelo
La Función Objetivo corresponde a la maximización de las utilidades a partir del aporte que hace cada revelador. Es decir:

Utilidad por un cuarto de FINO: $800; Utilidad total: 800**x**
Utilidad por un cuarto de EXTRAFINO: $1000; Utilidad total: 1000**y**
De esta forma la función Objetivo, será:

Maximizar $Z = 800x + 1000y$

Restricciones:
Existen algunas restricciones de producción a causa de las unidades limitadas de materia prima:

Onzas de solución A para la producción de un cuarto de FINO: 20; así las onzas totales de solución A para la producción de este revelador son: 20**x.**

Onzas de solución A para la producción de un cuarto de EXTRAFINO: 10; así las onzas totales de solución A para la producción de este revelador son: 10**y.**

Considerando que solo se dispone de 500 onzas de solución A, entonces:

$20x + 10y \leq 500$

De otra lado,

Onzas de solución B para la producción de un cuarto de FINO: 10; así las onzas totales de solución B para la producción de este revelador son: 10**x.**

Onzas de solución B para la producción de un cuarto de EXTRAFINO: 20; así las onzas totales de solución B para la producción de este revelador son: 20**y**.

Considerando que solo se dispone de 700 onzas de solución B, entonces:

$10x + 20y \leq 700$

Considerando que además no pueden existir producciones negativas:

$x, y \geq 0$

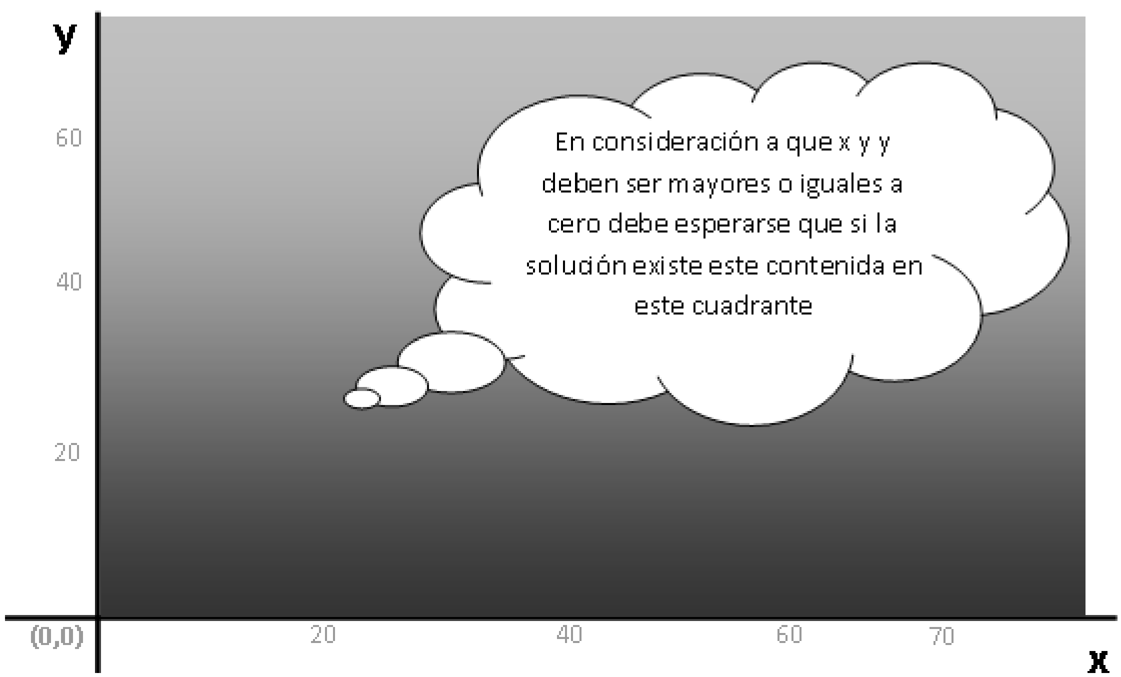
De esta manera el modelo que permite representar el problema es:

Maximizar: Z = 800x + 1000y
Sujeto a: $20x + 10y \leq 500$
$10x + 20y \leq 700$
$x, y \geq 0$

Solución del Modelo de Programación Lineal por el Método Gráfico

Lo primero será graficar las restricciones.

Restricciones de no negatividad, es decir $x, y \geq 0$

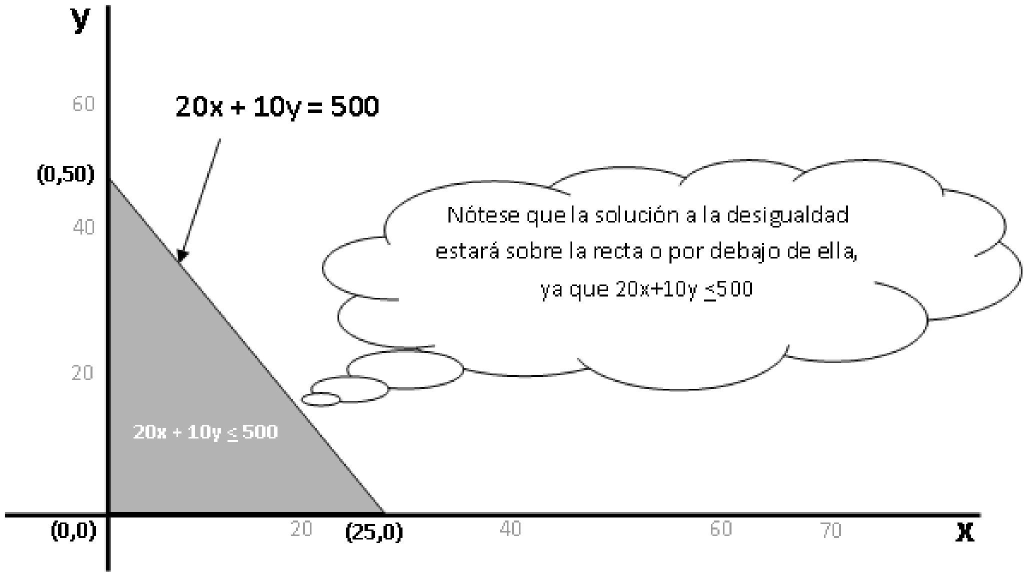


Restricción $20x + 10y \leq 500$;

Para graficar esta restricción se parte de la grafica de la ecuación $20x + 10y = 500$**.** Para graficar esta ecuación determinamos dos puntos, así:

Si x = 0, entonces y = 50, así se obtiene el punto (0, 50)

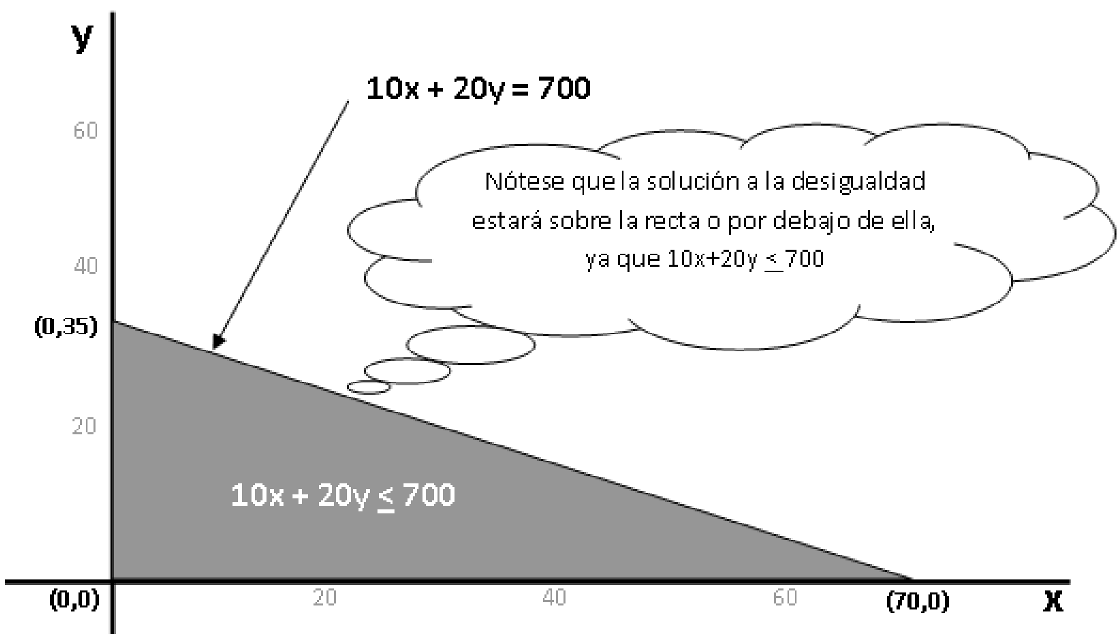
Si y = 0, entonces x = 25, así obtenemos el punto (25,0)



Considerando que la solución para la ecuación son los puntos sobre la recta, la solución para la desigualdad son los puntos que están sobre la recta y por debajo de ella, es decir los puntos ubicados en el área que se muestra.

Restricción $10x + 20y < 700$
Para graficar esta restricción se parte de la grafica de la ecuación $10x + 20y = 700$**.** Para graficar esta ecuación determinamos dos puntos, así:

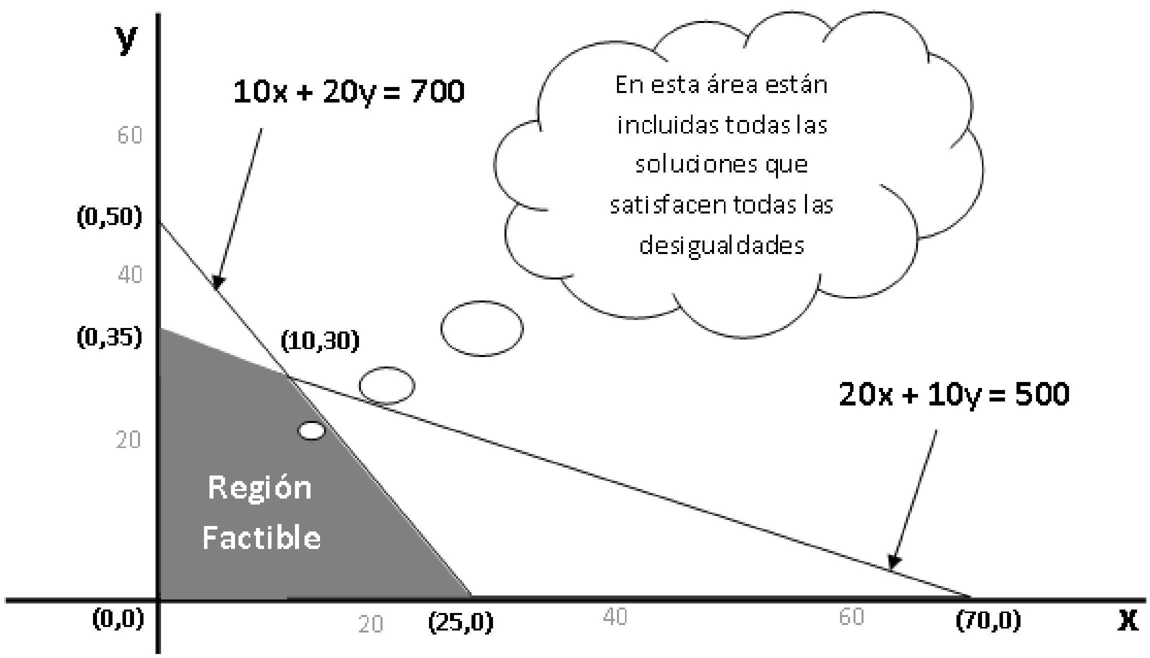
Si $x = 0$, entonces $y = 35$, así se obtiene el punto (0, 35)
Si $y = 0$, entonces $x = 70$, así obtenemos el punto (70,0)



Considerando que la solución para la ecuación son los puntos sobre la recta, la solución para la desigualdad son los puntos que están sobre la recta y los puntos que están por debajo de ella, es decir los puntos ubicados en el área que se muestra.

La solución que satisface ambas desigualdades y las restricciones x $\geq$ 0; y $\geq$ 0, es el área que intercepta las soluciones de ambas desigualdades; es decir, el área que esta limitada por los puntos **(0,35), (10,30), (25,0) y (0,0)** (Región Factible).

También se puede afirmar que los valores de **x** y **y** que maximizan la función objetivo estarán incluidos en esta área y se puede demostrar que la solución óptima siempre ocurre en un vértice de la región factible, porque para cualquier otro punto que se encuentra sobre la frontera siempre hay un vértice que tiene la misma utilidad o mayor



De esta forma se puede calcular el valor máximo de **Z** remplazando los valores de **x** y **y** de los vértices en la función objetivo, **Z = 800x + 1000y**. Así como se muestra en la siguiente tabla:

Valor de x	Valor de y	Valor de Z
0	35	35.000
10	**30**	**38.000**
25	0	20.000
0	0	0

De la tabla podemos concluir que se deben producir 10 cuartos de revelador FINO (x=10) y 30 cuartos de revelador EXTRAFINO (y=30) para maximizar las utilidades del fabricante; además que las utilidades máximas son de 38.000.

4. MÉTODO SIMPLEX PARA LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

En el apartado anterior se trato la solución de los Modelos de Programación Lineal de dos variables a través del método gráfico. Considerando los limitantes de este método, en este apartado se analiza un método sistemático para la solución de los modelos de Programación Lineal con más de dos variables de decisión.

El procedimiento, conocido como Método Simplex, es aplicado para la forma canónica del modelo de Programación Lineal, es decir:

Maximizar $\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Sujeta a:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m
\end{aligned}
$$

Donde: $\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$

La justificación e ilustración del método se realiza a través de ejemplos, en caso de que el lector se encuentre interesado en ampliar sobre el método puede referirse a la bibliografía.

Para emplear el método se requiere transformar las desigualdades en igualdades, lo cual se logra adicionando una variable de holgura a la desigualdad. Para ilustrar lo anterior se retoma el modelo del ejemplo 1.8

Maximizar $\quad Z = 800x + 1000y$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
20x + 10y &\le 500 \qquad (1) \\
10x + 20y &\le 700 \qquad (2) \\
x, y &\ge 0
\end{aligned}
$$

Si agregamos la variable de holgura v_1 a la desigualdad (1) obtenemos:

$20x + 10y + v_1 = 500$

En términos prácticos v_1 es la cantidad de solución A que no se utilizará en la producción de revelado FINO (x) y EXTRAFINO (y); es decir, si se producen, por ejemplo, 20 cuartos de FINO y 5 cuartos de EXTRAFINO, entonces tenemos que:

$20(20) + 10(5) + v_1 = 500$; es decir, que se tienen 50 onzas de solución A (v_1) que no se utilizaran.

De igual manera, v_2 es la variable de holgura que considera la cantidad no utilizable de solución B. Nótese que las variables de holgura son variables no negativas, de esta manera el problema de Programación Lineal se puede escribir como:

Maximizar $Z = 800x + 1000y + 0v_1 + 0v_2$

Sujeto a: $20x + 10y + v_1 + 0v_2 = 500$ (1)

$10x + 20y + 0v_1 + v_2 = 700$ (2)

$x, y, v_1, v_2 \geq 0$

Variables básicas y Solución Básica

En un problema de Programación Lineal con **n** variables (incluyendo las de holgura) y **m** ecuaciones, (n-m) es el número de variables no básicas y las restantes se denominan variables básicas. Para el ejemplo, tenemos 4 variables y 2 ecuaciones, por consiguiente serán 2 las variables no básicas y 2 las variables básicas

Para analizar las soluciones posibles, consideremos las diferentes combinaciones de pares de variables no básicas, así:

$x = 0$; $y = 0$

$20(0) + 10(0) + v_1 + 0v_2 = 500$, de acá: $v_1 = 500$

$10(0) + 20(0) + 0v_1 + v_2 = 700$, de acá: $v_2 = 700$

De esta forma una solución básica del modelo será:

$x = 0$ Variable no básica

$y = 0$ Variable no básica

$v_1 = 500$ Variable básica

$v_2 = 700$ Variable básica

Se puede obtener otra solución básica tomando un par diferente de variables no básicas, por ejemplo:

$x = 0$; $v_1 = 0$

$20(0) + 10y + 1(0) + 0v_2 = 500$, de acá: $y = 50$

$10(0) + 20y + 0(0) + v_2 = 700$, de acá: $v_2 = -300$

De esta forma una solución básica del modelo será:

$x = 0$ Variable no básica

$y = 50$ Variable básica

$v_1 = 0$ Variable no básica

$v_2 = -300$ Variable básica

Se puede demostrar que un problema de Programación Lineal de **n** variables y **m** ecuaciones tiene **(n!) / [(n-m)! m!]** soluciones básicas

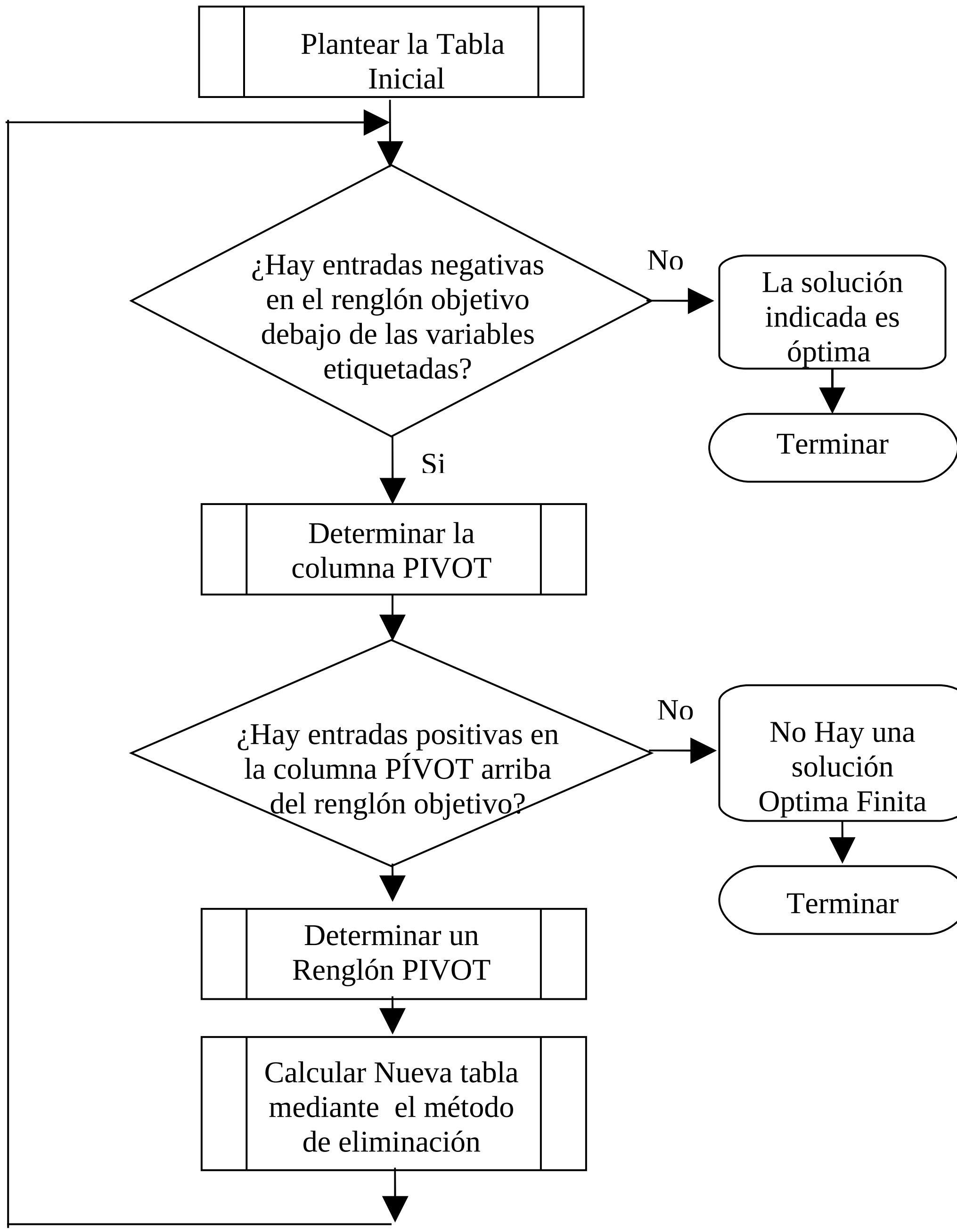
Para el ejemplo, las soluciones básicas son: (4!) / [(4-2)! 2!] = 6, es decir que se tienen 6 soluciones básicas, las cuales se muestran en la siguiente tabla:

SOLUCIÓN	**SOLUCIONES BÁSICAS**				
	x	**y**	v_1	v_2	**Z**
1	0	0	500	700	0
2	0	35	0	-300	35.000
3	0	35	150	0	35.000
4	25	0	0	450	20.000
5	70	0	-900	0	56.000
6	10	30	0	0	38.000

Las soluciones básicas factibles son aquellas (por la restricciones de no negatividad) donde las variables toman valores no negativos; es decir, las soluciones 2 y 5 no son soluciones factibles, a diferencia de las soluciones 1, 3, 4 y 6 que si lo son. Remplazando los valores de x, y, v_1 y v_2 de la tabla anterior en la función objetivo se obtiene que los valores que maximizan Z son: x = 10, y = 30 y el valor de Z = 38.000

Si se comparan estos resultados con las encontradas en la solución gráfica [(0,0), (0,35), (25,0), (10,30)], se comprueba, como era de esperarse, que estas son coincidentes.

Con el fin de sistematizar la forma de hallar la solución de los modelos de Programación Lineal se propone el método simplex el cual es un algoritmo que permite llegar a una solución paso por paso, así como se ilustra en la grafica No 1.1



Gráfica No 1.1 – Algoritmo para la solución de modelos de Programación Lineal a través del método Simplex

En detalle el método consta de los siguientes pasos:

Paso 1 Plantear la tabla inicial

La tabla inicial se plantea a partir del modelo escrito con las variables de holgura, es decir, para el ejemplo 2 el cual se viene analizando.

Maximizar $Z = 800x + 1000y + 0v_1 + 0v_2$
Sujeto a: $20x + 10y + v_1 + 0v_2 = 500$
$10x + 20y + 0v_1 + v_2 = 700$
$x, y, v_1, v_2 \geq 0$

Si expresamos la función objetivo como: $-800x - 1000y - 0v_1 - 0v_2 + Z = 0$; se puede representar el sistema en la siguiente tabla -Tabla Inicial-

Tabla Inicial

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	20	10	1	0	0	500
v_2	10	20	0	1	0	700
	-800	-1000	0	0	1	0

Paso 2 Criterio de Optimalidad.

Si el renglón objetivo no tiene elementos negativos en las columnas etiquetadas con variables, entonces la solución indicada es optima; con esto concluyen los cálculos. Para el caso que se analiza se comprueba que existen variables negativas, entonces es posible continuar con el procedimiento para encontrar una solución

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT.

Se determina como la columna con el elemento más negativo en el renglón objetivo. Si hay varios candidatos se elige cualquiera. Para el ejemplo, la columna PÍVOT es la etiquetada con la variable **y**.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	20	10	1	0	0	500
v_2	10	20	0	1	0	700
	-800	-1000	0	0	1	0

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.

Se elige como aquel que tiene la menor razón entre el elemento de la columna extrema derecha con el elemento de la columna PÍVOT. Para el ejemplo:

500 / 10 = 50

700 / 20 = 35

Es decir, que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento 20, el cual a su vez será el elemento PÍVOT. De otro lado, la variable de entrada será la **y** y la de salida v_2, así como se indica en la tabla

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	20	10	1	0	0	500
v_2	10	20	0	1	0	700
	-800	-1000	0	0	1	0

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.

Utilizando el método de eliminación por pívot -el mismo utilizado para transformar una matriz en la forma escalonada reducida por renglones- se procede a transformar la tabla inicial, para el ejemplo:

a) Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	20	10	1	0	0	500
v_2	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-800	-1000	0	0	1	0

b) Sumar los múltiplos adecuados del renglón pívot a los demás renglones, incluyendo los de la función objetivo, de manera que se obtengan entradas iguales a cero. Sumar al primer renglón menos diez veces el renglón pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	15	0	1	-½	0	150
v_2	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-800	-1000	0	0	1	0

Sumar al renglón objetivo (1000) veces el renglón pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	15	0	1	-½	0	150
y	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-300	0	0	50	1	35000

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero, excepto el PÍVOT, se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad.

Si el renglón objetivo no tiene elementos negativos en las columnas etiquetadas con variables, entonces la solución indicada es optima; con esto concluyen los cálculos. Para el ejemplo se comprueba que existen variables negativas, entonces es posible continuar con el procedimiento para encontrar una solución

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT.

Se determina como la columna con la entrada más negativa en el renglón objetivo. Si hay varios candidatos se elige cualquiera. Para el caso que se analiza la columna PÍVOT es la etiquetada con la variable **x**.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	15	0	1	-½	0	150
y	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-300	0	0	50	1	35000

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.

Se elige como aquel como aquel cuya razón entre el elemento de la columna extrema derecha con el elemento de la columna PÍVOT sea menor. Para el ejemplo:

150 / 15 = 10

35 / ½ = 70

Es decir que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento 15, el cual a su vez será el elemento PÍVOT. De otro lado, la variable de entrada será la **x** y la de salida v_1, así como se indica en la tabla.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	15	0	1	-½	0	150
y	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-300	0	0	50	1	35000

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.

Utilizando el método de eliminación por pívot se procede transformar la tabla:

a) Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	1	0	$^1/_{15}$	$-^1/_{30}$	0	10
y	½	1	0	$^1/_{20}$	0	35
	-300	0	0	50	1	35000

b) Sumar los múltiplos adecuados del renglón pívot a los demás renglones, incluyendo los de la función objetiva, de manera que se obtengan entradas iguales a cero.

Sumar al segundo renglón menos un medio de veces el renglón pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
v_1	1	0	$^1/_{15}$	$-^1/_{30}$	0	10
y	0	1	$-^1/_{30}$	$^1/_{15}$	0	30
	-300	0	0	50	1	35000

Sumar al renglón objetivo trescientas veces el renglón pívot.

	x	y	v_1	v_2	Z	
x	1	0	$^1/_{15}$	$-^1/_{30}$	0	10
y	0	1	$-^1/_{30}$	$^1/_{15}$	0	30
	0	0	20	40	1	38000

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad.

Si el renglón objetivo no tiene entradas negativas en las columnas etiquetadas con variables, entonces la solución indicada es optima; con esto concluyen los cálculos.

Para el caso que se analiza se comprueba que no existen variables negativas, entonces la solución encontrada es la óptima.

De esta manera la solución óptima es: **$x = 10$; $y = 30$; $v_1 = 0$; $v_2 = 0$**

En el ejemplo 1.9 se ilustra la solución de un modelo de Programación Lineal con tres variables a través del método simplex

---

Ejemplo 1.9

Resolver por el método simplex el siguiente modelo de Programación Lineal.

Maximizar $Z = 2x - 4y + 5w$

Sujeto a:
$$3x + 2y + w \leq 6$$
$$3x - 6y + 7w \leq 9$$
$$x, y, w \geq 0$$

Solución

Paso 1 Plantear la tabla inicial

La tabla inicial se plantea a partir del modelo adicionando las variables de holgura, es decir:

Maximizar $-2x + 4y - 5w + 0v_1 + 0v_2 + Z = 0$

Sujeto a: $3x + 2y + w + v_1 + 0v_2 = 6$

$3x - 6y + 7w + 0v_1 + v_2 = 9$

$x, y, v_1, v_2 \geq 0$

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	3	2	1	1	0	0	6
v_2	3	-6	7	0	1	0	9
	-2	4	-5	0	0	1	0

Paso 2 Criterio de Optimalidad.
Para el caso que se analiza se comprueba que existen variables negativas, entonces es posible continuar con el procedimiento para encontrar una solución.

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT.
Para el caso que se analiza la columna PÍVOT es la etiquetada con la variable **w.**

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	3	2	1	1	0	0	6
v_2	3	-6	7	0	1	0	9
	-2	4	-5	0	0	1	0

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.
Para el caso:

6 / 1 = 6.00

9 / 7 = 1.28

Es decir que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento 7, el cual a su vez será el elemento PÍVOT. De esta forma, la variable de entrada será **w** y la de salida v_2, así como se indica en la siguiente tabla.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	3	2	1	1	0	0	6
v_2	3	-6	7	0	1	0	9
	-2	4	-5	0	0	1	0

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.
Utilizando el método de eliminación por pívot se procede transformar la tabla:

Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	3	2	1	1	0	0	6
v_2	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	-2	4	-5	0	0	1	0

Sumar los múltiplos adecuados del renglón pívot a los demás renglones, incluyendo los de la función objetiva, de manera que se obtengan entradas iguales a cero.

Sumar al primer renglón menos una vez el renglón pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{18}/_{7}$	$^{20}/_{7}$	0	1	$^{-1}/_{7}$	0	$^{33}/_{7}$
v_2	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	-2	4	-5	0	0	1	0

Sumar al renglón objetivo cinco veces el renglón pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{18}/_{7}$	$^{20}/_{7}$	0	1	$^{-1}/_{7}$	0	$^{33}/_{7}$
w	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	$^{1}/_{7}$	$^{-2}/_{7}$	0	0	$^{5}/_{7}$	1	$^{45}/_{7}$

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad

Para el ejemplo se comprueba que existen variables negativas, entonces es posible continuar con el procedimiento para encontrar una solución.

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT.

Para el caso que se analiza la columna PÍVOT es la etiquetada con la variable **y.**

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{18}/_{7}$	$^{20}/_{7}$	0	1	$^{-1}/_{7}$	0	$^{33}/_{7}$
w	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	$^{1}/_{7}$	$^{-2}/_{7}$	0	0	$^{5}/_{7}$	1	$^{45}/_{7}$

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.

Para el caso:

$^{33}/_{7}$ / $^{20}/_{7}$ = $^{33}/_{20}$

Es decir que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento $^{20}/_{7}$ y el elemento PÍVOT será $^{20}/_{7}$. De otro lado, la variable de entrada será "**y"** y la de salida v_1, así como se indica en la siguiente tabla.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{18}/_{7}$	$^{20}/_{7}$	0	1	$^{-1}/_{7}$	0	$^{33}/_{7}$
w	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	$^{1}/_{7}$	$^{-2}/_{7}$	0	0	$^{5}/_{7}$	1	$^{45}/_{7}$

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.

Utilizando el método de eliminación por pívot se procede transformar la tabla, así:

Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{9}/_{10}$	1	0	$^{7}/_{20}$	$^{-1}/_{20}$	0	$^{33}/_{20}$
w	$^{3}/_{7}$	$^{-6}/_{7}$	1	0	$^{1}/_{7}$	0	$^{9}/_{7}$
	$^{1}/_{7}$	$^{-2}/_{7}$	0	0	$^{5}/_{7}$	1	$^{45}/_{7}$

Sumar los múltiplos adecuados del renglón pívot a los demás renglones, incluyendo el renglón objetivo, de manera que se obtengan entradas iguales a cero.

Sumar al segundo renglón seis séptimos veces el renglón pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
v_1	$^{9}/_{10}$	1	0	$^{7}/_{20}$	$^{-1}/_{20}$	0	$^{33}/_{20}$
w	$^{39}/_{28}$	0	1	$^{3}/_{10}$	$^{1}/_{10}$	0	$^{27}/_{10}$
	$^{1}/_{7}$	$^{-2}/_{7}$	0	0	$^{5}/_{7}$	1	$^{45}/_{7}$

Sumar al renglón objetivo dos séptimas veces el renglón pívot.

	x	y	w	v_1	v_2	Z	
y	$^{9}/_{10}$	1	0	$^{7}/_{20}$	$^{-1}/_{20}$	0	$^{33}/_{20}$
w	$^{84}/_{70}$	0	1	$^{3}/_{10}$	$^{1}/_{10}$	0	$^{27}/_{10}$
	$^{2}/_{5}$	0	0	$^{1}/_{10}$	$^{7}/_{10}$	1	$^{69}/_{10}$

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad.
Para el caso que se analiza se comprueba que no existen variables negativas en el renglón objetivo, entonces se puede concluir que la solución es óptima la que se muestra en la tabla final, es decir:

$x = 0$; $y = {}^{33}/_{20}$; $w = {}^{27}/_{10}$; $Z = {}^{69}/_{10}$

---

5. EL PROBLEMA DUAL

En este apartado se analiza la relación entre los problemas de Programación Lineal de Maximización y de Minimización. Se comprueba que para todo problema de maximización, existe un problema de minimización asociado, denominado el problema *DUAL* y para todo problema de minimización existe un problema *DUAL* asociado de maximización.

Considere los siguientes modelos de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{Sujeta a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\text{Donde:} & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
\qquad (3)
$$

El cual se puede escribir en forma matricial como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = c\,x \\
\text{Sujeto a:} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Entonces existe el modelo (4) al cual se le denomina el problema DUAL.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z' = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n \\
\text{Sujeta a:} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n
\end{array}
\qquad (4)
$$

Donde: $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$

El cual se puede escribir en forma matricial como:

Minimizar $Z' = b^T y$
Sujeto a: $A^T y \geq c^T$
$y \geq 0$

Estos dos modelos son denominados duales, el problema representado por (3) es el ***Problema Primal***, y el modelo (4) es el ***Problema Dual***.

A través del ejemplo 1.10 se ilustra el problema de la dualidad.

Ejemplo 1.10

Determinar el Problema Dual del siguiente modelo de Programación Lineal:

Maximizar $Z = 2x_1 + 4x_2$
Sujeto a: $2x_1 + 3x_2 \leq 3$
$3x_1 - x_2 \leq 4$
$5x_1 + 4x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

Solución

Considerando que el modelo dado corresponde a un modelo canónico se puede afirmar que para él existe un modelo Dual. En forma matricial el modelo propuesto se puede escribir, como:

$$\text{Maximizar } Z = \begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Maximizar $Z = c\,x$
Sujeto a: $Ax \leq b$
$x \geq 0$

De acuerdo a la definición el problema Dual esta dado por:

Minimizar $Z' = b^T y$
Sujeto a: $A^T y \geq c^T$
$y \geq 0$

Para hallar el problema Dual debemos pues determinar $\mathbf{b^T}$, $\mathbf{A^T}$ y $\mathbf{c^T}$

$$\mathbf{b^T} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Es decir que el modelo Dual será:

$$\textbf{Minimizar } Z' = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$$

$$\textbf{Sujeto a: } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$

Es decir que el modelo del problema DUAL será:

Minimizar $Z' = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3$

Sujeto a: $2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 2$

$3y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 4$

$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$

Correspondencia entre la solución del problema Primal y del problema Dual.

Se puede demostrar que:

Teorema 1.

Si el problema primal o el problema dual tienen una solución óptima con valor objetivo finito, entonces el otro problema también tiene una solución óptima. Además, los valores objetivos de los dos problemas son iguales

También se puede demostrar que:

Teorema 2.

Si se resuelve el problema primal mediante el método Símplex, la tabla final contiene la solución óptima del problema dual en el renglón objetivo, bajo las columnas de las variables de holgura. y_1 corresponderá a la primera variable de holgura; y_2 a la segunda y así sucesivamente.

En el ejemplo 1.11 se ilustra el uso del problema dual.

Ejemplo 1.11
Un alimento tiene maíz, miel y pasas. Suponga que cada onza de maíz contiene 3 unidades de proteínas, 1 unidad de calorías y cuesta $6; cada onza de miel contiene 1 unidad de proteínas, 1 unidad de calorías y cuesta $4 y cada onza de pasas contiene 1 unidad de proteínas, 2 unidades de calorías y cuesta $6. Si cada unidad del alimento debe contener al menos 2 unidades de proteínas y 3 unidades de calorías. ¿Cuántas onzas de cada ingrediente deben utilizarse para minimizar el costo de cada unidad de alimento?

Definición de variables
$\mathbf{y}_1$: Onzas de maíz incluidas en el alimento
$\mathbf{y}_2$: Onzas de miel incluidas en el alimento
$\mathbf{y}_3$: Onzas de pasas incluidas en el alimento

Formulación del Modelo
La Función Objetivo corresponde a la minimización de los costos de los ingredientes que componen el alimento. Es decir:

Minimizar $Z = 6y_1 + 4y_2 + 6y_3$

Las restricciones tienen que ver con las cantidades mínimas de proteínas y calorías que debe contener el alimento, es decir:

<u>Proteínas</u>

$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$

<u>Calorías</u>

$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$

De esta forma el modelo de Programación Lineal que representa el problema es:

Minimizar $\mathbf{Z = 6y_1 + 4y_2 + 6y_3}$

Sujeto a: $\mathbf{3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2}$

$\mathbf{y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3}$

$\mathbf{y_1 , y_2 , y_3 \geq 0}$

Considerando que no se tiene una metodología directa para solucionar este modelo se recurre a la solución del modelo Dual, la cual permitirá encontrar una solución al problema planteado de acuerdo al teorema 2.

Expresando el modelo en forma matricial tenemos que:

Minimizar $Z = b^T y$
Sujeto a: $A^T y \geq c^T$
$y \geq 0$

$$\text{Minimizar } Z = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \mathbf{y_3} \end{vmatrix}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

El Problema DUAL será:

Recordando que $(b^T)^T = b$; entonces podemos determinar c, b, A

Maximizar $Z = c\,x$
Sujeto a: $Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$(b^T)^T = \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$(c^T)^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

De esta forma el modelo DUAL, será:

$$\text{Maximizar } Z = \begin{vmatrix} 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Es decir:

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeto a: $3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Para resolver el anterior modelo por el método Símplex, escribimos el modelo con las variables de holgura y seguimos los pasos:

Maximizar $-2x_1 - 3x_2 - 0v_1 - 0v_2 - 0v_3 + Z = 0$

Sujeto a: $3x_1 + x_2 + v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 6$

$x_1 + x_2 + 0v_1 + v_2 + 0v_3 = 4$

$x_1 + 2x_2 + 0v_1 + 0v_2 + v_3 = 6$

$x_1, x_2, v_1, v_2, v_3 \geq 0$

Paso 1 Plantear la tabla inicial
La tabla inicial se plantea a partir del modelo escrito con las variables de holgura, es decir:

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	1	1	0	1	0	0	4
v_3	1	2	0	0	1	0	6
	-2	-3	0	0	0	1	0

Paso 2 Criterio de Optimalidad.
Ya que el renglón objetivo tiene entradas negativas en las columnas etiquetadas con variables, entonces se continúa con el procedimiento para encontrar la solución

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT.
Se determina como la columna con la entrada más negativa en el renglón objetivo, así como se muestra en la tabla.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	1	1	0	1	0	0	4
v_3	1	2	0	0	1	0	6
	-2	-3	0	0	0	1	0

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.
Para el caso calculamos:

6 / 1 = 6

4 / 1 = 4

6 / 2 = 3; se escoge por ser el menor

Es decir que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento 2, el cual será a su vez el elemento PÍVOT. De otro lado, la variable de entrada será la $\mathbf{x}_2$ y la de salida v_3, así como se indica en la siguiente tabla.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	1	1	0	1	0	0	4
v_3	1	2	0	0	1	0	6
	-2	-3	0	0	0	1	0

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.
Utilizando el método de eliminación por pívot se procede transformar la tabla:

- Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	1	1	0	1	0	0	4
v_3	½	1	0	0	½	0	3
	-2	-3	0	0	0	1	0

Sume al renglón objetivo tres veces el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	1	1	0	1	0	0	4
v_3	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^3/_2$	1	9

Sume al segundo renglón menos una vez el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	3	1	1	0	0	0	6
v_2	½	0	0	1	-½	0	1
v_3	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^3/_2$	1	9

Sume al primer renglón menos una vez el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	$^5/_2$	0	1	0	-½	0	3
v_2	½	0	0	1	-½	0	1
x_2	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^3/_2$	1	9

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero con excepción del elemento Pívot, se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad.
Ya que el renglón objetivo tiene entradas negativas en las columnas etiquetadas con variables, entonces se continúa con el procedimiento para encontrar la solución

Paso 3 Elección de la columna PÍVOT
Se determina como la columna con la entrada más negativa en el renglón objetivo, así como se muestra en la tabla.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	$^5/_2$	0	1	0	-½	0	3
v_2	½	0	0	1	-½	0	1
x_2	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^3/_2$	1	9

Paso 4 Elección del renglón PÍVOT.
Para el caso calculamos:

$3 / {}^5/_2 = 1.2$; se escoge por ser el menor

$1 / {}^1/_2 = 2$

$3/ {}^1/_2 = 6$

Es decir que el renglón PÍVOT será el que contiene el elemento $^5/_2$ y el elemento PÍVOT será $^5/_2$. De otro lado, la variable de entrada será la $\mathbf{x_1}$ y la de salida v_1, así como se indica en la siguiente tabla.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	$^{5}/_{2}$	0	1	0	-½	0	3
v_2	½	0	0	1	-½	0	1
x_2	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^{3}/_{2}$	1	9

Paso 5 Eliminación por el método PÍVOT.
Utilizando el método de eliminación por pívot se procede transformar la tabla:

Multiplique el renglón pívot por el inverso del valor del elemento pívot

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	1	0	$^{2}/_{5}$	0	$^{-1}/_{5}$	0	$^{6}/_{5}$
v_2	½	0	0	1	-½	0	1
x_2	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^{3}/_{2}$	1	9

Sume al segundo renglón menos un medio veces el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	1	0	$^{2}/_{5}$	0	$^{-1}/_{5}$	0	$^{6}/_{5}$
v_2	0	0	$^{-1}/_{5}$	1	$^{-2}/_{5}$	0	$^{-3}/_{5}$
x_2	½	1	0	0	½	0	3
	-½	0	0	0	$^{3}/_{2}$	1	9

Sume al tercer renglón menos un medio veces el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
v_1	1	0	$^{2}/_{5}$	0	$^{-1}/_{5}$	0	$^{6}/_{5}$
v_2	0	0	$^{-1}/_{5}$	1	$^{-2}/_{5}$	0	$^{-3}/_{5}$
x_2	0	1	$^{-1}/_{5}$	0	$^{1}/_{10}$	0	$^{12}/_{5}$
	-½	0	0	0	$^{3}/_{2}$	1	9

Sume al renglón objetivo un medio de veces el renglón PÍVOT

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	Z	
x_1	1	0	$^{2}/_{5}$	0	$^{-1}/_{5}$	0	$^{6}/_{5}$
v_2	0	0	$^{-1}/_{5}$	1	$^{-2}/_{5}$	0	$^{-3}/_{5}$
x_2	0	1	$^{-1}/_{5}$	0	$^{1}/_{10}$	0	$^{12}/_{5}$
	0	0	$^{1}/_{5}$	0	$^{7}/_{5}$	1	$^{48}/_{5}$

Considerando que los elementos de la columna Pívot son todos iguales a cero con excepción del elemento Pívot, se vuelve al paso 2.

Paso 2 Criterio de Optimalidad.
Ya que el renglón objetivo no tiene elementos negativas en las columnas etiquetadas con variables, entonces la solución es la óptima. Es decir:

$x_1 = {}^{6}/_{5}$; $x_2 = {}^{12}/_{5}$ **;** $Z = {}^{48}/_{5}$

Teniendo en cuenta el Teorema 2, de la tabla obtenemos que:

$\mathbf{y}_1 = {}^1/_5$; $\mathbf{y}_2 = 0$; $\mathbf{y}_3 = {}^7/_5$; es decir que:

Para minimizar los costos, en la elaboración del alimento se deben utilizar ${}^1/_5$ de onzas de maíz ($\mathbf{y}_1$); 0 onzas de miel ($\mathbf{y}_2$) y ${}^7/_5$ de onzas de pasas ($\mathbf{y}_3$). Y los costos serán de ${}^{48}/_5$ u.m.

---

6. SOLUCIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP[3]

Microsoft EXCEL, tal como sucede con los sistemas lineales y las operaciones con matrices, es una herramienta útil para la solución de los modelos de programación lineal.

Para esto EXCEL utiliza la opción SOLVER, el cual es un paquete agregado a Excel que sirve para hallar la solución optima a los modelos matemáticos sujetos a restricciones, como son los modelos de Programación Lineal. Para esto SOLVER emplea el método simplex y lo único que tiene que hacer el usuario es presentar el modelo en la hoja de cálculo de manera adecuada. SOLVER, además de permitir la solución de los Modelos de Programación Lineal, puede ser utilizado también para la solución de Modelos no Lineales.

[3] Copyright© Microsoft Corporation 1985-2001

Unidad III
Teoría de Líneas de Espera

Unidad III
Teoría de Líneas de Espera

Contenido

Objetivos

Representar el problema empresarial de atención a los clientes a través de un modelo de Líneas de Espera.
Caracterizar los modelos de Líneas de Espera M/M/1
Realizar análisis de costos a partir de la caracterización de los modelos M/M/1 para determinar niveles de servicio.
Caracterizar los modelos de Líneas de Espera M/M/S
Realizar análisis de costos a partir de la caracterización de los modelos M/M/S para determinar niveles de servicio
Caracterizar los modelos de Líneas de Espera M/G/1
Caracterizar los modelos de Líneas de Espera M/D/1
Caracterizar el modelo de la Fórmula de la llamada Pérdida de Erlang

INTRODUCCIÓN

A todos, casi sin excepción, nos ha tocado esperar en una fila para recibir un servicio. Aunque esta situación no es nueva, en los últimos años, debido a las grandes concentraciones urbanas, las filas son cada vez más y mayores.

Ante estas circunstancias las empresas prestadoras de servicio se ven enfrentadas a la disyuntiva de aumentar sus costos para prestar un mejor y más rápido servicio y así mantener a sus clientes satisfechos o a sacrificar la comodidad de ellos en aras a mantener bajos los costos.

La teoría de Líneas de Espera brinda a los administradores un método racional para tomar decisiones en cuanto al punto de equilibrio entre costos y el servicio al cliente.

Aunque se podrían llenar páginas enteras con los casos que se refieren a las líneas de espera, a continuación, a manera de ejemplo, se relacionan algunas de ellas:

- ✓ Esperar para utilizar un cajero electrónico
- ✓ Esperar para presentar una reclamación a la empresa de servicios.
- ✓ Esperar en el banco para realizar alguna transacción financiera.
- ✓ Esperar en una EPS para recibir atención medica.
- ✓ Esperar para pagar en un supermercado.
- ✓ Esperar para comprar tiquetes de entrada al estadio
- ✓ Esperar para ingresar en un espectáculo público.

Como se menciono la lista de este tipo de colas que son percibidas por los usuarios podría ser interminable; no obstante, existen otras que no son percibidas directamente, ejemplos de ellas son: las llamadas telefónicas, las conexiones a la Internet o la recepción y envío de correo electrónico, entre otras situaciones. De otro lado, también los equipos o maquinas necesitan ponerse en fila cuando requieren algún servicio de mantenimiento o reparación. Así se puede definir una Línea de Espera como la acción de aguardar que debe realizar “alguien” o “algo” cuando requiere un servicio y este no se le presta de manera inmediata.

Dado lo recurrente de este tema en la vida cotidiana y la necesidad que tienen las empresas de diferenciarse ya sea a través del precio, el producto o el servicio que les prestan a sus clientes, el tratamiento racional de las líneas de espera es cada vez de mayor importancia.

La Teoría de Espera iniciada en los años 1910 por el ingeniero danés Erlang, incluye el estudio matemático de las diferentes filas o colas, permitiendo describirlas a través de modelos matemáticos. En estos modelos se hace referencia a todos los componentes que conforman el sistema; es decir, a las unidades que solicitan servicio, la línea de espera propiamente dicha, las instalaciones y agentes prestadores del servicio y las unidades que se retiran después de recibir servicio.

A diferencia de los modelos de programación lineal, la teoría de líneas de espera abarca un importante grupo de modelos, en donde cada uno se refiere a un tipo diferente de situación. No obstante, todos estos modelos tienen algunos elementos comunes. Por ejemplo, a través de los modelos no se pretende "resolver" los problemas de las líneas de espera, sino describir los sistemas a través de las características de operación, de tal forma que el administrador pueda realizar el análisis y tomar las decisiones correspondientes.

Entre estas características se incluyen, entre otras: el número promedio de “clientes” que esperan el servicio, el número promedio de clientes que están siendo atendidos, el tiempo promedio en que son atendidos y el tiempo promedio que les toca esperar. Estas características que se calculan a partir de los parámetros de las líneas de espera permiten al administrador tomar la decisión de aumentar o disminuir el servicio, de acuerdo a las circunstancias y condiciones de cada negocio en particular.

De esta forma, la teoría de líneas de espera proporciona al administrador la información para tomar decisiones en cuanto a asumir costos para mejorar el servicio o asumir los costos de tener clientes insatisfechos.

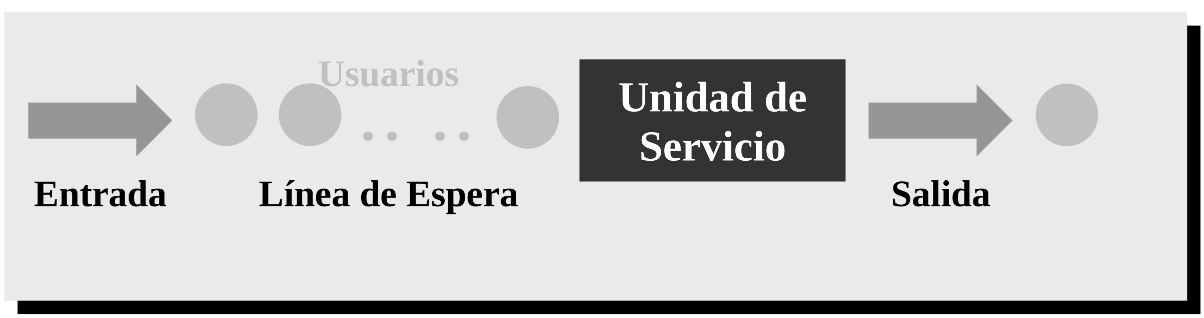
1. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE LÍNEAS DE ESPERA

La clasificación de las líneas de espera se realiza teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- ✓ Por la cantidad de unidades de servicio por las que el cliente debe pasar para ser atendido
- ✓ Por la cantidad de las unidades de servicio
- ✓ Por el patrón de llegada de los clientes a la unidad de servicio.
- ✓ Por el patrón de atención de los usuarios.

De acuerdo al primer criterio los sistemas de líneas de espera pueden llegar a ser de etapa única y de etapa múltiple.

En el sistema de Etapa Única los usuarios pasan a través de una unidad de servicio, es decir que ellos tienen una entrada y una salida del punto de servicio. Son muchos los casos que se pueden modelar a través de este sistema, por ejemplo: las filas para el pago de los víveres en un supermercado o las filas para el ingreso a un espectáculo público. El sistema de Línea de Espera de Etapa Única se ilustra en la gráfica No 1.1



Gráfica No 1.1 Sistema de Línea de Espera de Etapa Única

Por su parte en el sistema de Líneas de Espera de Etapa Múltiple los usuarios deben pasar por más de una unidad de servicio para recibir la atención. En este sistema la salida del primer punto de servicio se convierte en la entrada a un segundo punto de servicio, y así sucesivamente.

Algunos casos prácticos que se pueden modelar con este tipo de sistemas son por ejemplo: las filas que son necesarias cuando se visita un restaurante de comidas rápidas; inicialmente se hace la fila en la caja para hacer el pedido, una vez se retira de la caja se hace fila para reclamar el pedido; las filas que es necesario hacer en una notaria para sacar un registro civil, inicialmente se hace el pedido a la dependiente, una vez se sale de allí hay que pasar a la fila de la caja y una vez se sale de esta se pasa a la fila para la firma del notario. El sistema de Línea de Espera de Etapa Múltiple se ilustra en la gráfica No 1.2

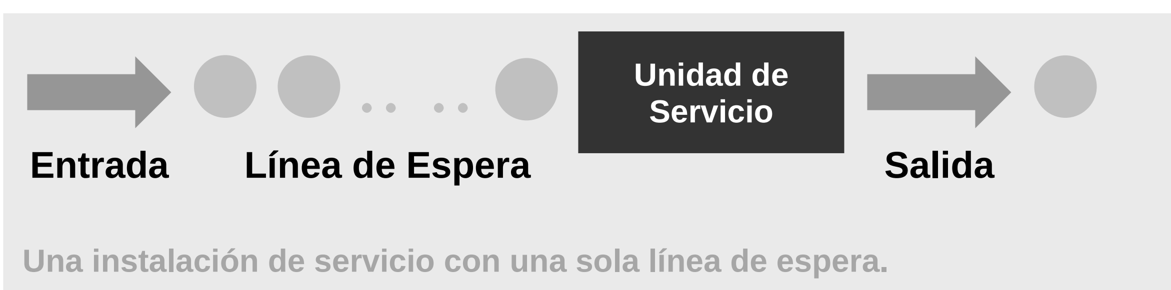
Gráfica No 1.2 Sistema de Línea de Espera de Etapa Múltiple.

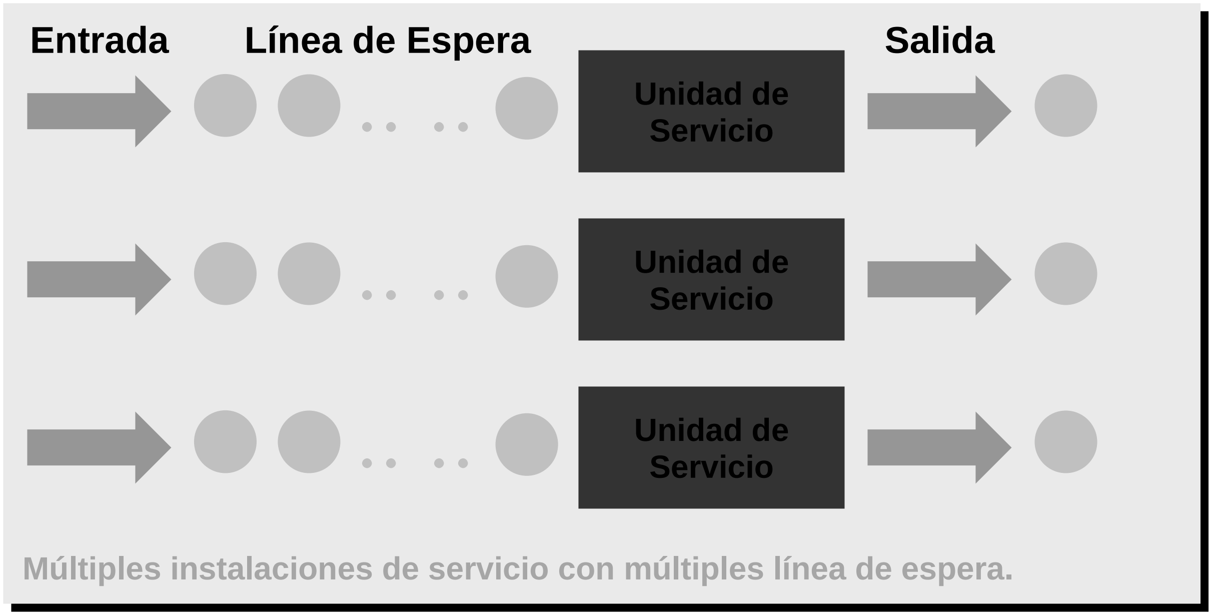
Nótese que los sistemas de líneas de espera de etapa múltiple no son más que un conjunto compuesto de sistemas de líneas de espera de etapa única de esta forma restringiremos el estudio a los sistemas de espera de etapa única.

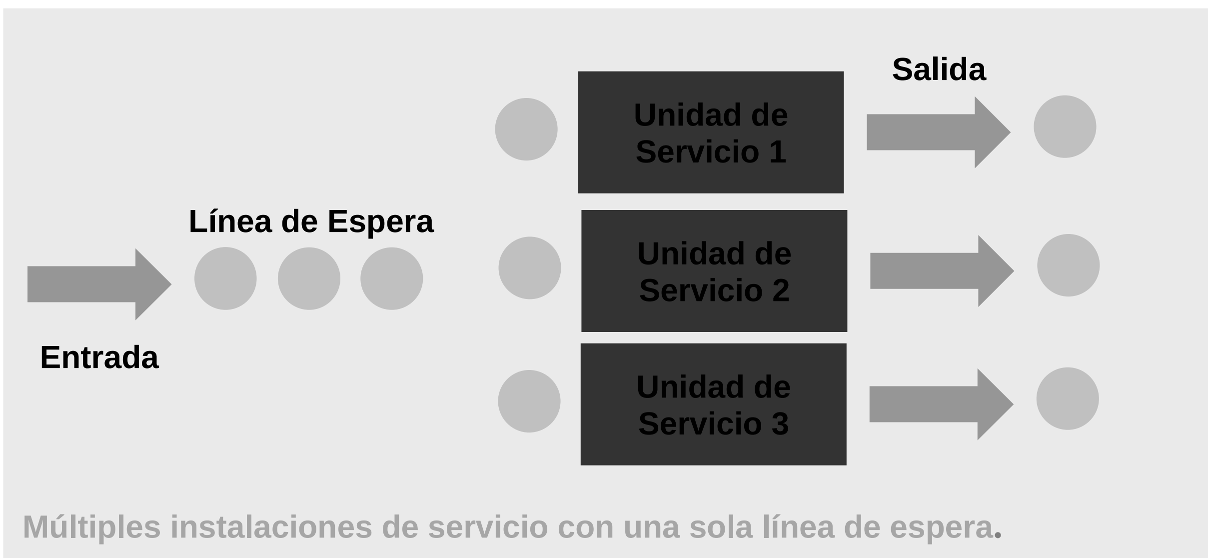
Teniendo en cuanta la anterior consideración podemos clasificar los sistemas de etapa única según el segundo criterio, es decir de acuerdo al número de unidades de servicio. Así:

- ✓ Una instalación de servicio única con una sola línea de espera
- ✓ Instalaciones de servicio múltiples con múltiples líneas de espera.
- ✓ Instalaciones de servicio múltiples con una sola línea de espera.

En la gráfica 1.3 se muestran los tres casos antes relacionados.







Gráfica No 1.3 Clasificación de los sistemas de etapa única

Notación Kendall

En general, la forma como llegan los clientes y como son atendidos no se conoce con certeza sino que son de naturaleza estocástica o probabilística. Es decir que las frecuencias de llegada y de atención se describen a través de distribuciones probabilísticas, ósea que se deben elegir aquellas distribuciones probabilísticas que describen apropiadamente el comportamiento de las llegadas y del servicio.

Para describir la frecuencia de llegadas y la atención en los sistemas de líneas de espera se utilizan básicamente tres distribuciones de probabilidad, ellas son:

- ✓ Distribución de Markov
- ✓ Distribución Deterministica
- ✓ Distribución General

La distribución de *Markov* se utiliza para describir ocurrencias aleatorias, es decir, aquellas donde no puede determinarse un comportamiento a través de eventos pasados. Por su parte, la distribución *determinística* es aquella en la cual se puede determinar la ocurrencia a través de los sucesos pasados; es decir, se espera que los sucesos ocurran en forma constante y sin cambios. Finalmente, una distribución *general* sería cualquier otra distribución de probabilidad.

Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

Con el fin de facilitar el entendimiento de estos sistemas, el matemático británico KENDALL elaboró una notación abreviada para describir en forma sintética los parámetros que describen los sistemas de líneas de espera. En la notación de Kendall un sistema de líneas de espera se designa como:

A / B / C

Donde:

A: Es una letra que denota la distribución de llegada de los usuarios

B: Es una letra que denota la distribución de servicio

C: Es un entero positivo que indica el número de servidores

Cuando la distribución es Markoviana se utiliza la letra **M**, si la distribución es Deterministica se denota con una letra **D** y finalmente si la distribución es general se denota con una letra **G**.

Por ejemplo, la atención en un banco donde llegan los clientes de manera aleatoria, el tiempo de atención de los cajeros es aleatorio y existen cuatro cajas de atención, el modelo se puede identificar por notación Kendall, como: **M / M / 4**

Otras consideraciones

A parte de la forma como se forma la línea de espera o como son atendidos los usuarios, existen otras consideraciones que deben tenerse en cuenta al momento de analizar un sistema de líneas de espera. Estas son:

- ✓ El tamaño la población de la que provienen los elementos que ingresan a las líneas de espera; si es una población infinita o finita.
- ✓ La forma como llegan los usuarios a la fila; si llegan uno a uno o en grupos.
- ✓ El orden en que son atendidos los usuarios de la línea de espera; si son atendidos en el orden que llegan o existen otros criterios de atención.
- ✓ Si los clientes pueden o no ser rechazados de la línea de espera.
- ✓ Si los clientes pueden o no abandonar la línea de espera.
- ✓ Si existe espacio suficiente para albergar todos los usuarios que llegan al sistema

2. CARACTERÍSTICAS DE LAS LÍNEAS DE ESPERA M/M/1

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones el modelo **M/M/1** describe una situación donde las llegadas de los clientes se realiza de manera aleatoria, los tiempos de servicio, igualmente, son aleatorios y se tiene una sola unidad de servicio.

Este tipo de situaciones son normales en la vida cotidiana, por ejemplo: la fila en el supermercado, la fila en el banco, un conmutador telefónico o una línea de atención de emergencias son todas situaciones clásicas que pueden ser modeladas a través de este tipo de sistemas.

Con respecto a las llegadas se ha determinado que las ocurrencias aleatorias de un tipo especial se pueden describir a través de una distribución de Poisson**.** Este tipo especial de llegadas aleatorias supone dos características acerca de los flujos de entrada. En primer lugar, supone que las llegadas son por completo independientes entre sí e independientes del estado del sistema. En segundo lugar, la probabilidad de una llegada durante un periodo específico no depende de cuándo ocurre el periodo sino que depende sólo de la longitud del intervalo. Si conocemos el número promedio de ocurrencias por periodo, podemos calcular las probabilidades acerca

del número de eventos que ocurrirán en un periodo determinado utilizando las propiedades de la distribución de Poisson.
En particular, si existe un promedio de **λ** llegadas en un periodo **T**, la probabilidad de **n** llegadas en el mismo periodo esta dada por:

P[n llegadas en el tiempo T] = $(e^{-\lambda T} (\lambda T)^{n}) / (n!)$

Donde**:** e = 2.71828;   y   n! = (n)(n-1)(n-2)…..(2)(1)

Al igual que las llegadas, en este tipo de sistemas los tiempos de servicio son aleatorios; es decir, son carentes de memoria. Y al igual que con las llegadas aleatorias, los tiempos de servicio se describen a través de una distribución de probabilidad. La diferencia esta en que los tiempos de servicio aleatorios se describen a través de una distribución exponencial negativa. Esta última una distribución continua, a diferencia de la distribución de Poisson que es discreta.
De esta forma, si los tiempos de servicio se describen a través de una distribución exponencial negativa y si **μ** es la tasa promedio de servicio, entonces la distribución esta dada por:

$f(t) = \mu e^{-\mu t}$

A través de esta formula es posible calcular la probabilidad de que el servicio sea más prolongado que alguna duración especifica de tiempo T. Es decir,

P (el servicio se tarda más que T) = P(t>T)

En donde t = tiempo de servicio, utilizando la distribución exponencial negativa, encontramos que:

$P(t \leq T) = 1 - e^{-\mu T}$

Lo que muestra que:

$P(t > T) = e^{-\mu T}$

Dado que:

$P(t > T) = 1 - P(t \leq T)$

Condiciones para las Líneas de Espera M/M/1

Además de considerar llegadas con distribución de Poisson y atenciones o servicios con distribución exponenciales negativas, en este modelo se deben hacer las siguientes consideraciones:

- ✓ Existe una sola unidad de servicio a la cual llegan los clientes uno a uno.
- ✓ La población de usuarios es infinita
- ✓ El espacio para la formación de la línea de espera es infinito
- ✓ El servicio se presta de acuerdo al orden de llegada, es decir: el primero que llega es el primero que se atiende.
- ✓ No se permite que haya rechazos en la fila de espera.
- ✓ No se permite que haya abandonos en la fila de espera
- ✓ El sistema se considera en su estado estacionario; es decir, no se analizan los estados transitorios.

Con respecto a esta última consideración es necesario acotar lo siguiente. En muchas situaciones de las líneas de espera existen periodo transitorios con características diferentes a los valores promedio a largo plazo que se encuentran cuando el sistema esta en estado estable. Un ejemplo de periodo transitorio es la entrada inicial y apresurada de clientes en un banco cuando se abren sus puertas.

El modelo que se caracteriza en este apartado no analiza los periodos transitorios, a través de él se analizan las características promedio a largo plazo que se presentan cuando el sistema ha alcanzado el estado estacionario o estable.

Aunque el estado estacionario es una condición ideal en los sistemas de líneas de espera, muchos de ellos se aproximan lo suficiente para que las características de este estado estacionario resulten útiles para describir el sistema.

Condición Práctica

Antes de continuar con la descripción del modelo se anota que en la práctica es necesario validar que la situación real que se quiere analizar se ajusta a un modelo de la forma M/M/1, es decir: que las llegadas tienen un comportamiento de distribución de Poisson y las atenciones se asemejan a una distribución exponencial negativa.

Para probar que la tasa real de llegadas se ajusta a la distribución de Poisson y que la tasa real de servicio se ajusta a la distribución exponencial negativa, primero se deben recopilar datos sobre los tiempos de llegada y de servicio, y después se debe utilizar la técnica estadística conocida como prueba de bondad de ajuste ji cuadrada *(x^2)* para determinar si los datos se ajustan en realidad a las distribuciones mencionadas.

Características Operativas de las Líneas de Espera M/M/1

Lo primero que debemos tener en cuenta en la operación de una Línea de Espera **M/M/1** es que **λ** = tasa promedio de llegadas, debe ser menor a **μ =** tasa promedio de atenciones; ya que si esto no fuera así el promedio de llegadas sería superior al numero promedio de clientes que son atendidos y por consiguiente el número de clientes se acumularía volviéndose la cola infinitamente grande.

Teniendo en cuenta la anterior consideración, se pueden definir los siguientes elementos:

Factor de utilización

El Factor de utilización se define como el factor de tiempo que el sistema esta ocupado, matemáticamente se puede escribir como:

$\rho = \lambda/\mu$ (1)

En otros términos indica la probabilidad de que el sistema esté ocupado, así:

P_w = Probabilidad de que el sistema esté ocupado = $\rho = (\lambda/\mu) \times 100\%$ (2)

Nótese que este factor también indica el número promedio de clientes que están siendo atendidas en cualquier momento.

De lo anterior, se puede deducir la probabilidad de que el sistema este desocupado (**Po**); es decir, que no se estén atendiendo usuarios en un momento determinado, matemáticamente:

$P_o = (1 - P_w) = (1 - \lambda/\mu) \times 100\% = (1 - \rho) \times 100\%$ (3)

Y a partir de aquí se puede calcular la probabilidad de que haya **n** usuarios en el sistema $\mathbf{P_n}$

$P_n = (P_o)(\lambda/\mu)^n = P_o \rho^n$ (4)

Donde n es un número no negativo.
A partir de las anteriores características y parámetros se pueden determinar el resto de las características operativas del modelo.

Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema (L)
Esta característica define los clientes promedio que se encuentran en el sistema ya sea que se encuentren esperando en la fila o estén siendo atendidas. Este número promedio de usuarios L se puede describir matemáticamente como:

$L = \rho/(1 - \rho) = \lambda/(\mu - \lambda)$ (5)

Número promedio de clientes que esperan ser atendidos (L_q)
Dado que L es el número promedio de clientes que están esperando o están siendo atendidas y que **ρ** es el número promedio de unidades que están siendo atendidas en algún momento dado, entonces $\mathbf{L = L_q + \rho}$**,** donde L_q es el número promedio de clientes que esperan en la fila ser atendidos y el cual se puede determinar matemáticamente como:

$L_q = L - \rho = \rho^2/(1-\rho) = \lambda^2/[\mu(\mu - \lambda)]$ (6)

Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema (W)
Representa el tiempo promedio que un cliente se encuentra en el sistema ya sea esperando en el sistema o mientras está siendo atendido. Siendo L el número promedio esperado de clientes en el sistema y **λ** el número promedio de clientes que llegan para ser atendidos por periodo, entonces el tiempo promedio que cualquier usuario que llega debe esperar, esta dado por:

$W = L/\lambda = 1/(\mu - \lambda)$ (7)

Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido (W_q)

De manera similar al caso anterior, tenemos que:

$W_q = L_q/ \lambda = \lambda /[\mu(\mu- \lambda)]$ (8)

Observe que $W = W_q + 1/ \mu$. Lo cual indica que el total de tiempo invertido en el sistema W es igual al tiempo de espera (**W_q**) más el tiempo de servicio (**$1/ \mu$**).

En la siguiente tabla se resumen los elementos que permiten caracterizar las Líneas de espera M/M/1, para cuando se tiene un promedio de llegadas de clientes o usuarios igual a **λ** y una rata de atención de los usuarios igual a **μ.**

Símbolo	Descripción	Formula Matemática
ρ	Factor de Utilización del sistema	**$\rho = \lambda/\mu$** (1)
P_w	Probabilidad de que el sistema esté ocupado	**$P_w = \lambda/\mu$** (2)
P_o	Probabilidad de que el sistema esté desocupado	**$P_o = (1-\lambda/\mu)$** (3)
P_n	Probabilidad de que haya n usuarios en el sistema	**$P_n = (P_o)(\lambda/\mu)^n$** (4)
L	Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema.	**$L = \lambda/(\mu- \lambda)$** (5)
L_q	Número promedio de clientes que esperan ser atendidos	**$L_q = \lambda^2/[\mu(\mu- \lambda)]$** (6)
W	Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema	**$W = 1/(\mu- \lambda)$** (7)
W_q	Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido	**$W_q = \lambda/[\mu(\mu-\lambda)]$** (8)

Tabla No 1.1 Características de operación de las Líneas de Espera M/M/1

Con los ejemplo 1.1 y 1.2 se ilustra la forma de hallar la caracterización de las líneas de espera M/M/1 y su uso en la gestión administrativa.

Ejemplo 1.1

El supermercado “EL EXITASO” tiene una caja de atención rápida donde atiende solo a clientes con 10 o menos artículos, con lo cual esta es una caja de pago más rápida que las cajas de atención normales. El gerente Pedro Blanco después de levantar la información sobre esta caja ha logrado determinar que los clientes llegan a una tasa promedio de 70 por hora y que en promedio la atención de un cliente requiere 45 segundos, tiempo en cual la cajera además del registro y cobro realiza el empaque de los artículos.

Considerando que las políticas de atención al cliente del almacén son que no se debe hacer esperar a los clientes más de 4 minutos en este tipo de cajas.

Analice y recomiende al gerente algunas estrategias para mejorar la atención de los clientes en esta caja. Para ello determine:

1. El **λ y μ** de la caja de atención rápida
2. Las características operacionales de la caja de atención

Solución.

1. Determinar los valores de **λ y μ**
   λ = 70 Clientes por hora

   Considerando que se atiende en promedio un cliente cada 45 segundos, la tasa de atención de clientes por hora será de:

   μ = 80 Clientes por hora

2. Las características operacionales de la caja de atención rápida

Característica		**Fórmula**	**Valor**
ρ	Factor de Utilización del sistema	$\rho = \lambda/\mu$	**0.875**
P_w	Probabilidad de que el sistema esté ocupado	$P_w = \lambda/\mu$	**87.5%**
P_o	Probabilidad de que el sistema esté desocupado	$P_o = (1-\lambda/\mu)$	**12.5%**
L	Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema.	$L = \lambda/(\mu-\lambda)$	**7**
L_q	Número promedio de clientes que esperan ser atendidos	$L_q = \lambda^2/[\mu(\mu-\lambda)]$	**6.125**
W	Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema	$W = 1/(\mu-\lambda)$	**6 min.**
W_q	Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido	$W_q = \lambda/[\mu(\mu-\lambda)]$	**5.4 min.**

3. Análisis de la situación de la caja
   De las características se puede concluir que el tiempo que los clientes deben esperar en la caja supera ampliamente la política de atención al cliente, por ello se debe buscar aumentar la tasa de atención de los clientes, es decir aumentar el **μ.** Hasta cuanto se debe aumentar la tasa de atención para atender la política se ilustra en la siguiente tabla, en la cual se hace un análisis de sensibilidad

μ	**λ**	**L**	**W**
81	70	6,4	5.48
82	70	5,8	4.97
83	70	5,4	4.62
84	70	5,0	4.28
85	70	4,7	4.02
86	70	4,4	3.77

Si se quiere ser exacto con las políticas del Supermercado se debe aumentar la productividad del cajero(a) de la caja de atención rápida hasta lograr un rendimiento de 86 atenciones por hora.

Para ello se podría implementar una o varias de las siguientes estrategias:

- Someter al cajero(a) a un entrenamiento, en caso de ser necesario, para aumentar la velocidad de atención de los clientes.
- Mejorar la tecnología de la caja en caso de ser necesario (Por ejemplo: a través de un lector de código de barras, una banda transportadora, etc.)

- Descargar al cajero(a) de alguna de sus tareas, como por ejemplo: colocando un empaquetador

---

Ejemplo 1.2
Una empresa de transporte de carga recibe en promedio 2 aviones Jumbo de carga por día. De la experiencia el transportista sabe que para la descarga de un avión un grupo de 3 hombres (cuadrilla) trabajando 8 horas diarias se toma 2 días. Si cada hora de trabajo hombre le cuesta al transportista $500 y por la demora de cada avión en los hangares paga una multa de $10.000 por día o fracción ¿Cuál debe ser el número óptimo de cuadrillas (grupo de tres hombres) que debe utilizar para minimizar los costos?

Solución

1. Determinar los valores de **λ y μ**
   λ = 2 aviones por día

   Considerando que una cuadrilla atiende ½ de avión por día, **m** cuadrillas atenderán m(½) aviones por día. Es decir que:

   μ = m(½) aviones por día

   Y teniendo en cuenta que **μ > λ**, entonces **m(½)** > **2**, es decir que **m > 4**.

   El número de cuadrillas debe ser mayor que 4 con el fin de que no se acumulen los aviones en los hangares.

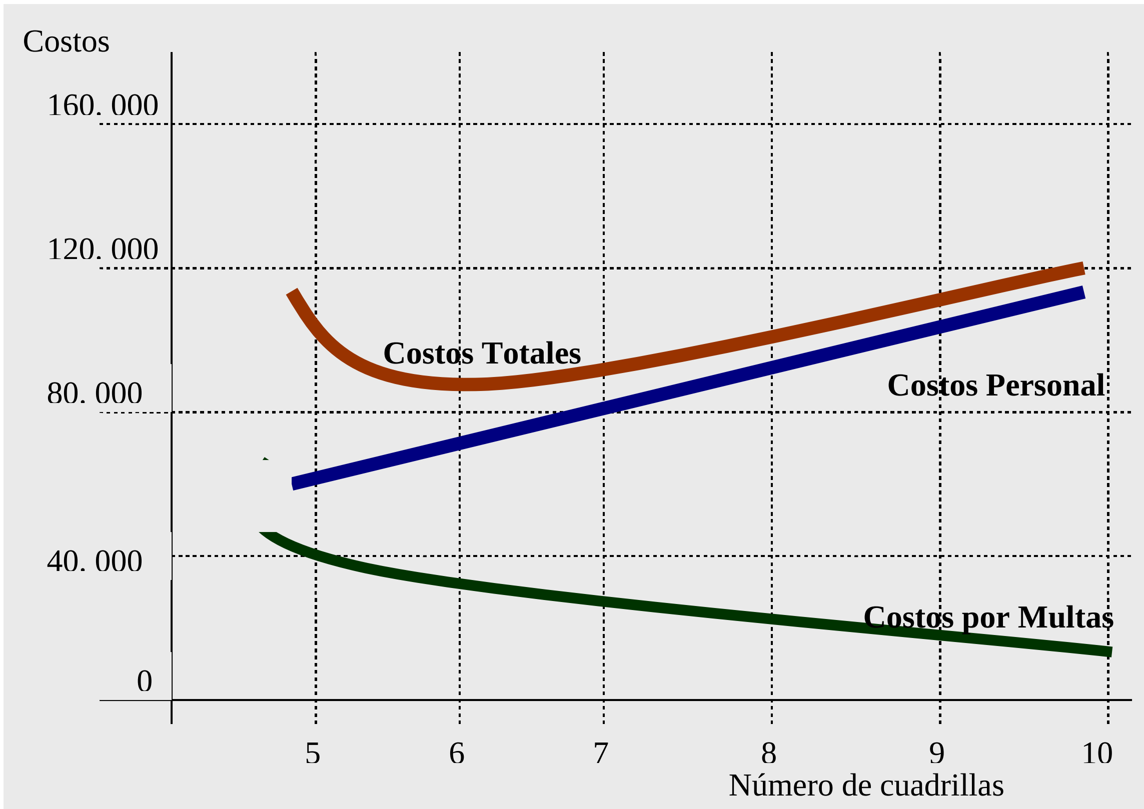
2. Determinar los Costos.
   Costo de una cuadrilla por día $500 x 8horas x 3 = $12.000
   Costo de multas por los aviones por día o fracción = L x $10.000
   Costos Totales = $12.000 x (**m**) + **L** x $10.000

3. Determinación de la solución óptima.
   Para determinar la solución óptima lo que se hace es calcular los costos para varias posibilidades, así:

Característica	**Número de Equipos**					
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
(λ)	2	2	2	2	2	2
(μ)	2,5	3	3,5	4	4,5	5
(ρ)	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,40
(Po)	0,20	0,33	0,43	0,50	0,56	0,60
(L)	4,00	2,00	1,33	1,00	0,80	0,67
(Lq)	3,20	1,33	0,76	0,50	0,36	0,27
(W)	2,00	1,00	0,67	0,50	0,40	0,33
(Wq)	1,60	0,67	0,38	0,25	0,18	0,13
Costo Equipos trabajo	60.000	72.000	84.000	96.000	108.000	120.000
Costo Espera	40.000	20.000	13.333	10.000	8.000	6.666
Costo Total	100.000	92.000	97.333	106.000	116.000	126.666

De la tabla se puede observar que para 5 cuadrillas el costo total es superior que para 6 cuadrillas; no obstante, para 7 cuadrillas el costo es superior al de 6. De esta manera el número óptimo de cuadrillas son 6 ya que es el número para el cual los costos son mínimos.

El comportamiento de los costos se muestra en la gráfica No 1.4



Grafica No 1.4 Comportamiento de los costos para el ejemplo 1.2

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS LÍNEAS DE ESPERA M/M/S

Igual que en el caso anterior en este modelo se suponen llegadas y tiempos de servicio aleatorios para los canales de servicio múltiples. Es decir, que se deben tener las mismas consideraciones que para el modelo de canal único de servicio (M/M/1).

La principal diferencia que existe entre los modelos es que en el modelo M/M/S existe una sola fila de entrada que alimenta los canales múltiples de servicio con iguales tasas de servicio. El cálculo de las características de la línea de espera para el modelo M/M/S son algo más elaboradas que para el caso del canal único, y dado que el interés son las implicaciones más que la formulación se utilizaran tablas previamente elaboradas a partir de las fórmulas para hacer los cálculos.

Características de Operación de las Líneas de Espera M/M/S

En este modelo si **μ** es la tasa promedio de servicio para cada canal de servicio, entonces ya no se requiere que **μ** > **λ,** sino que **Sμ** sea mayor que **λ** para evitar así una acumulación infinita de clientes en la línea de espera.

En el caso de M/M/S, la característica clave que se utilizará para hacer los demás cálculos es la probabilidad de que el sistema esté ocupado. En otras palabras, la probabilidad de que las **S** unidades estén siendo utilizadas, lo cual se puede expresar matemáticamente como:

P(sistema ocupado) = $\mathbf{P_w}$ = P (n≥S) y puede calcularse como:

$P_w = [(\rho^2(\mu S))/(S!(\mu S-\lambda))] x\ P_o$ (9)

Donde:

$P_o = 1 / [\sum [(1/n!)(\lambda/\mu)^n + (1/S!)\ (\lambda/\mu)^S\ (S\mu / (S\mu - \lambda))]$ (10)

La Sumatoria varia desde n = 0 hasta n = S-1

Con el fin de no tener que utilizar la ecuación (10), la cual no es fácil de manipular, a partir de S y ρ se puede determinar $\mathbf{P_o}$ a través de la tabla 1.2. A su vez, con P_o se puede calcular P_w fácilmente. Y a partir de P_w se pueden calcular las demás características operativas del sistema M/M/S.

Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema (L)

Igual que en el modelo M/M/1, tenemos que:

$L = L_q + \rho$

No obstante, en este caso es necesario calcular inicialmente $\mathbf{L_q}$

Número promedio de clientes que esperan ser atendidos (L_q)

El número promedio de clientes que esperan en la fila para ser atendidos se pude calcular a través de la siguiente expresión matemática:

$L_q = P_w \times (\rho/(S-\rho))$ (11)

Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema (L)

Por su parte el número promedio de clientes que se encuentran en el sistema se calcula como:

$L = L_q + \rho$

$L = P_w \times (\rho/(S-\rho)) + \rho$ (12)

Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema (W)

Igual que en el modelo anterior **$W = L/ \lambda$**

$W = (1/ \lambda)\ [P_w \times (\rho/(S-\rho)) + \rho]$ (13)

Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido (W_q)

Igual que en el caso anterior **$W_q = L_q/ \lambda$**

$W_q = (1/ \lambda)\ [P_w \times (\rho/(S-\rho))]$ (14)

En la tabla 1.3 se resumen las características de operación de las líneas de espera del tipo M/M/S.

Símbolo	Descripción	Formula Matemática
ρ	Factor de Utilización del sistema	$\rho = \lambda/\mu$
P_w	Probabilidad de que el sistema esté ocupado	$P_w = [(\rho^2(\mu S))/(S!(\mu S-\lambda))] \times P_o$ (9)
P_o	Probabilidad de que el sistema esté desocupado	Ver tabla Anexo 1
L	Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema.	$L = P_w \times (\rho/(S-\rho)) + \rho$ (12)
L_q	Número promedio de clientes que esperan ser atendidos	$L_q = P_w \times (\rho/(S-\rho))$ (11)
W	Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema	$W = (1/ \lambda)\ [P_w \times (\rho/(S-\rho)) + \rho]$ (13)
W_q	Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido	$W_q = (1/ \lambda)\ [P_w \times (\rho/(S-\rho))]$ (14)

Tabla No 1.3 Características de operación de las Líneas de Espera M/M/S

ρ	S						
	1	2	3	4	5	6	7
0.100	0.9000	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048
0.200	0.8000	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187
0.300	0.7000	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408	0.7408	0.7408
0.400	0.6000	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703	0.6703	0.6703
0.500	0.5000	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065	0.6065	0.6065
0.600	0.4000	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488	0.5488	0.5488
0.700	0.3000	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966	0.4966	0.4966
0.800	0.2000	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493	0.4493	0.4493
0.900	0.1000	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065	0.4066	0.4066
1.000		0.3333	0.3636	0.3673	0.3678	0.3679	0.3679
1.100		0.2903	0.3273	0.3321	0.3328	0.3329	0.3329
1.200		0.2500	0.2941	0.3002	0.3011	0.3012	0.3012
1.300		0.2121	0.2638	0.2712	0.2723	0.2725	0.2725
1.400		0.1765	0.2360	02449	0.2463	0.2466	0.2466
1.500		0.1429	0.2105	0.2210	0.2228	0.2231	0.2231
1.600		0.1111	0.1872	0.1993	0.2014	0.2018	0.2019
1.700		0.0811	0.1657	0.1796	0.1821	0.1826	0.1827
1.800		0.0526	0.1460	0.1616	0.1646	0.1652	0.1653
1. 900		0.0256	0.1278	0.1453	0.1487	0.1494	0.1495
2.000			0.1111	0.1304	0.1343	0.1351	0.1353
2.100			0.0957	0.1169	0.1213	0.1222	0.1224
2.200			0.0815	0.1046	0.1094	0.1105	0.1107
2.300			0.0683	0.0933	0.0987	0.0999	0.1002
2.400			0.0562	0.0831	0.0889	0.0903	0.0906
2.500			0.0449	0.0737	0.0801	0.0816	0.0820
2.600			0.0345	0.0651	0.0721	0.0737	0.0742
2.700			0.0249	0.0573	0.0648	0.0666	0.0671
2.800			0.0160	0.0502	0.0581	0.0601	0.0606
2.900			0.0077	0.0437	0.0521	0.0543	0.0548
3.000				0.0377	0.0466	0.0490	0.0496
3.100				0.0323	0.0417	0.0441	0.0448
3.200				0.0273	0.0372	0.0398	0.0405
3.300				0.0227	0.0330	0.0358	0.0366
3.400				0.0186	0.0293	0.0322	0.0331
3.500				0.0148	0.0259	0.0290	0.0298
3.600				0.0113	0.0228	0.0260	0.0269
3.700				0.0081	0.0200	0.0233	0.0243
3.800				0.0051	0.0174	0.0209	0.0219
3.900				0.0025	0.0151	0.0187	0.0198
4.000					0.0130	0.0167	0.0178
4.100					0.0111	0.0149	0.0160
4.200					0.0093	0.0132	0.0144
4.300					0.0077	0.0117	0.0130
4.400					0.0063	0.0104	0.0117
4.500					0.0050	0.0091	0.0105

Tabla No 1.2 – Determinación de $\mathbf{P_o}$ a partir del número de unidades de servicio (**S**) y el factor de utilización **ρ** = (**λ/μ**)

En los ejemplos 1.3 y 1.4 se ilustra el uso de los modelos de la línea de espera M/M/S en la gestión administrativa

Ejemplo 1.3
La recién egresada de la FUNLAM, administradora Natalia Camacho ha sido nombrada para administrar la sucursal centro del Banco de Medellín. Ella ha encontrado que el banco cuenta con siete (7) unidades de atención al público para servir una sola fila y de la información histórica ha logrado determinar que la rata promedio de atención es de (1) un cliente cada diez minutos para cada taquilla y la llegada de los clientes es de (18) diez y ocho por hora.

Ella quiere saber cual es número mínimo de taquillas que debe abrir. Además quiere conocer las características operativas para cada número de taquillas abiertas partiendo del número mínimo. Finalmente considerando que la política de atención de los clientes del banco es que un cliente no espere más de 3 minutos en la fila cuantas taquillas se vera en la obligación de abrir.

Solución

1. Determinar los valores de **λ y μ**
   λ = 18 clientes por hora

   Considerando que cada unidad de atención atiende un cliente cada 10 minutos, entonces:

   μ = 6 clientes por hora para cada unidad de atención

2. Unidades mínimas de atención que deben estar en servicio
   Sμ > λ, entonces **6S** > **18**, es decir que **S > 3**

   El número mínimo de unidades que deben estar abiertas con el fin de que no haya una acumulación infinita de clientes es **S = 4**.

3. Características de la Fila para **S** igual a **4, 5, 6 y 7**

Característica	**Número de unidades de servicio S**			
	4	**5**	**6**	**7**
(λ)	18	18	18	18
(μ)	6	6	6	6
ρ	3	3	3	3
S μ	24	30	36	42
(Po) (Tabla 1.2)	0,0377	0,0466	0,049	0,0496
(Pw)	0,05655	0,0087375	0,001225	0,000155
(L)	3,16965	3,01311	3,00123	3,00012
(Lq)	0,16965	0,01311	0,00123	0,00012
(W)	0,17609	0,16739	0,16673	0,16667
(Wq)	0,00943	0,00073	0,00007	0,00001

Nota: Los tiempos están dados en horas, considerando que la política se expresa en minutos es necesario hacer la conversión multiplicando estos valores por 60 minutos.

Ejemplo 1.4
La empresa de transporte de carga del Ejemplo 1.2 ha recibo nuevos contratos de transporte y a partir del próximo mes recibirá en promedio 3 aviones Jumbo de carga por día. Aunque la productividad de las cuadrillas se mantiene, tiene la oportunidad de alquilar 1 o 2 hangares adicionales para la descarga a un costo de $500 cada uno. Si el salario y las multas se mantienen ¿Cuál debe ser el número óptimo de cuadrillas (grupo de tres hombres) y de hangares que la empresa debe contratar para minimizar los costos?

Solución para una unidad de servicio S=1

1. Determinar los valores de **λ y μ**
   λ = 3 aviones por día

   Considerando que una cuadrilla atiende ½ de avión por día, **m** cuadrillas atenderán m(½) aviones por día. Es decir que:

   μ = m(½) aviones por día

   Y teniendo en cuenta que **μ > λ**, entonces **m(½)** > **3**, es decir que **m > 6**.

   El número de cuadrillas debe ser mayor que 6 con el fin de que no se acumulen los aviones en el hangar.

2. Determinar los Costos.
   Costo de una cuadrilla por día $500 x 8horas x 3 = $12.000
   Costo de multas por día por aviones en los hangares = L x $10.000
   Costos Totales = $12.000 x (**m**) + **L** x $10.000

3. Determinación de la solución óptima.
   Para determinar la solución óptima lo que se hace es calcular los costos para las distintas posibilidades, así:

Característica	**Número de Equipos para S = 1**					
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
(ρ)	0.8571	0.7500	0.6667	0.6000	0.5455	0.5000
(Po)	0.1429	0.2500	0.3333	0,4000	0.4545	0.5000
(L)	6.00	3.00	2.00	1.50	1.20	1.00
Costo Equipos trabajo	84.000	96.000	108.000	120.000	132.000	144.000
Costo Espera	60.000	30.000	20.000	15.000	12.000	10.000
Costo Total	144.000	126.000	128.000	135.000	144.000	154.000

Para el caso de un solo hangar el número óptimo de cuadrillas es 8.

Solución para dos unidades de servicio S=2

1. Determinar los valores de **λ y μ**
   λ = 3 aviones por día

   Considerando que una cuadrilla atiende ½ de avión por día, **m** cuadrillas atenderán m(½) aviones por día. Es decir que:

   μ = m(½) aviones por día

Y teniendo en cuenta que **Sμ > λ**, entonces **2m(½)** > **3**, es decir que **m > 3**.

El número de cuadrillas debe ser mayor que 3 en cada unidad de servicio con el fin de que no se acumulen aviones en los hangares.

2. Determinar los Costos.
Costo de una cuadrilla $500 x 8horas x 3 = $12.000
Costo de multas por aviones en los hangares = L x $10.000
Costos de alquiler nuevo Hangar = $500
Costos Totales = $12.000 x (**m**) + **L** x $10.000 + $500

3. Determinación de la solución óptima.
Para determinar la solución óptima lo que se hace es calcular los costos para las distintas posibilidades, así:

Característica	**Número de Equipos para S = 2**					
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
(ρ)	1.5000	1.2000	1.0000	0.8571	0.7500	0.6667
(Po)	0.1429	0.2500	0.3333	0,4040	0.4550	0.5194
(L)	3.4292	1.8750	1.3333	1.0519	0.8729	0.7532
Costo Equipos trabajo	96.000	120.000	144.000	168.000	192.000	216.000
Costo Espera	34.292	18.750	13.333	10.519	8.729	7.532
Costo alquiler	500	500	500	500	500	500
Costo Total	130.792	139.250	157.833	179.019	201.229	224.032

De la tabla se puede concluir que cualquier alternativa para dos unidades de servicio tiene un costo muy superior a la alternativa menos costosa de una unidad de servicio.

De esta manera, igual situación debe esperarse cuando se tienen tres unidades de servicio, no obstante a continuación se muestra el comportamiento

Solución para tres unidades de servicio S=3

1. Determinar los valores de **λ y μ**
λ = 3 aviones por día

Considerando que una cuadrilla atiende ½ de avión por día, **m** cuadrillas atenderán m(½) aviones por día. Es decir que:

μ = m(½) aviones por día

Y teniendo en cuenta que **Sμ > λ**, entonces **3m(½)** > **3**, es decir que **m > 2**.

El número de cuadrillas debe ser mayor que 2 en cada unidad de servicio con el fin de que no se acumulen aviones en los hangares.

2. Determinar los Costos.
Costo de una cuadrilla $500 x 8horas x 3 = $12.000
Costo de multas por aviones en los hangares = L x $10.000
Costos de alquiler nuevo Hangar = $500
Costos Totales = $12.000 x (**m**) + **L** x $10.000 + 2 ($500)

3. Determinación de la solución óptima.

Para determinar la solución óptima lo que se hace es calcular los costos para las distintas posibilidades, así:

Característica	Número de Equipos para S = 3					
	3	4	5	6	7	8
(ρ)	2.000	1.5000	1.2000	1.0000	0.8571	0.7500
(Po)	0.1111	0.2105	0.2941	0,3636	0.4253	0.4712
(L)	2.8888	1.7378	1.2941	1.0455	0.8821	0.7647
Costo Equipos trabajo	108.000	144.000	180.000	216.000	252.000	288.000
Costo Espera	28.888	17.378	12.941	10.455	8.821	7.647
Costo alquiler	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Costo Total	137.888	162.378	193.941	227.455	261.821	296.647

Como se esperaba los costos para cualquiera de estas alternativas tiene unos costos muy superiores a los de la alternativa de menor costo cuando se tiene una unidad de servicio.

4. MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA- CASOS: M/G/1 Y M/D/S

Además de los modelos M /M/1 y M/M/S existen otros modelos que describen otros tipos de Líneas de Espera en este apartado se analizan otros dos casos, ellos son: M/G/1 y el M/D/1, además se analiza la “Formula de la llamada Pérdida de Erlang”.

4.1 Modelo M/G/1

En este caso las llegadas se distribuyen de acuerdo con la distribución de Poisson, al igual que en los casos anteriores, pero los tiempos de servicio no necesariamente se distribuyen de acuerdo con la distribución exponencial negativa.

Por consiguiente para M/G/1 se considera un solo canal de servicio, llegadas tipo Markov (distribución de Poisson) y tiempo de servicio general. En este caso también cabe el modelo M/D/1.

Para calcular $\mathbf{L_q}$, se debe conocer el valor de desviación estándar de la distribución que describe los tiempos de servicio, $\boldsymbol{\sigma}$. Si no se conoce la distribución de los tiempos de servicio no es posible determinar las características de operación. Sin embargo, si conocemos la desviación estándar y la media de la distribución de los tiempos de servicio, puede obtenerse la fórmula para el valor de L_q a partir de la ecuación (15)

$L_q = [(\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2] / 2 (1- (\lambda/\mu))$ (15)

Igual que en el caso anterior se puede calcular los demás parámetros para caracterizar la Línea de Espera.

$L = L_q + \rho$ (16)

$W = L / \lambda$ (17)

$W_q = L_q / \lambda$ (18)

En la tabla 1.3 se resumen las características para el modelo M/G/1

Símbolo	Descripción	Formula Matemática
ρ	Factor de Utilización del sistema	**$\rho = \lambda/\mu$**
L	Número promedio de clientes que se encuentran en el sistema.	**$L = L_q + \rho$** (16)
L_q	Número promedio de clientes que esperan ser atendidos	**$L_q = [(\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2] / 2 (1- (\lambda/\mu))$** (15)
W	Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema	**$W = L / \lambda$** (17)
W_q	Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido	**$W_q = L_q / \lambda$** (18)

Tabla No 1.3 Características de operación de las Líneas de Espera M/G/1

4.2 Modelo M/D/1

En este caso los tiempos de servicio son determinísticos, caso especial de M/G/1, donde la desviación estándar es igual a cero. En este caso, el valor de L_q se calcula a través de la fórmula (19).

$L_q = (\lambda/\mu)^2/[2(1-(\lambda/\mu))]$ (19)

$L = L_q + \rho$ (20)

$W = L / \lambda$ (21)

$W_q = L_q / \lambda$ (22)

En la tabla 1.4 se resumen las características para el modelo M/D/1

Símbolo	Descripción	Formula Matemática
ρ	Factor de Utilización del sistema	**$\rho = \lambda/\mu$**
L	Número promedio de clientes que se	**$L = L_q + \rho$** (20)

	encuentran en el sistema.	
L_q	Número promedio de clientes que esperan ser atendidos	$\mathbf{L_q = (\lambda/\mu)^2/[2(1-(\lambda/\mu))]}$ (19)
W	Tiempo promedio que un cliente se encuentre en el sistema	$\mathbf{W = L / \lambda}$ (21)
W_q	Tiempo promedio que un cliente tiene que esperar antes de ser atendido	$\mathbf{W_q = L_q / \lambda}$ (22)

Tabla No 1.4 Características de operación de las Líneas de Espera M/D/1

4.3 Fórmula de la llamada Pérdida de Erlang

La Fórmula de la llamada Pérdida de Erlang, es un resultado que no depende de las distribuciones de probabilidad que describen las llegadas o los tiempos de servicio. A través de esta fórmula se puede calcular la probabilidad de que se pierda una llamada que llega a un conmutador debido a que quien la realiza obtiene la señal de ocupado. En el modelo se considera que el número de líneas que llegan al conmutador es igual al número de operadores que están listos para responder las llamadas y es muy útil para determinar el número de líneas telefónicas que se requieren en un centro de atención de urgencias.

P(llamada pérdida) = $\mathbf{(\rho/n!)/(\sum(\rho^k/K!))}$ (23)

La sumatoria Varia desde K=0 hasta n

Donde n = al número de líneas y $\rho = \lambda/\mu$

5. CARACTERIZACIÓN DE MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA CON Microsoft EXCEL de Microsoft Office XP[4]

Igual que para los modelos anteriores Microsoft EXCEL es una herramienta muy útil para caracterizar los modelos de Teoría de Líneas de Espera, realizar análisis de sensibilidad y análisis de costos en dichos modelos.

[4] Copyright© Microsoft Corporation 1985-2001

Unidad IV
Teoría de Decisiones

Unidad IV
Teoría de Decisiones

Contenido

Introducción al Análisis de Decisiones.
El proceso de Toma de Decisiones
Tipos de Decisiones y otros aspectos
Formulación del problema
Toma de decisiones sin datos previos
Toma de decisiones con datos previos

Objetivos

Comprender el proceso de toma de decisiones y su importancia para el buen desempeño de las funciones administrativas y gerenciales.
Interiorizar los tipos de decisiones a los cuales se ve enfrentado el administrador.
Ser capaz de formular un problema y elegir estrategia adecuadas para la toma de decisiones.
Utilizar las técnicas y estrategias para la toma de decisiones cuando no se cuenta con datos previos.
Utilizar las técnicas y estrategias para la toma de decisiones cuando se cuenta con datos previos.

INTRODUCCIÓN

Los hombres todos los días toman decisiones, la mayoría de ellas de manera rutinaria sobre asuntos de poca monta. Sin embargo, en algunos casos se toman decisiones sobre temas trascendentes tanto para la vida particular, como para las organizaciones a las cuales se pertenece.

En los negocios dueños o administradores cada día se ven enfrentados a decidir sobre asuntos que serán determinantes para el futuro de las empresas. Decisiones como: la introducción de nuevos productos al mercado, la escogencia de un portafolio de inversiones, los precios que debe ofertar en una licitación, la cantidad de producto que se debe producir, si debe o no apuntalar los esfuerzos a una determinada iniciativa, entre otros asuntos, son decisiones que determinaran el futuro de las organizaciones.

En este capitulo se analiza el proceso de toma de decisiones y se presentan algunos modelos de decisión que ayudan a mejorar el proceso. Los modelos de decisión independiente de que se usen o no, proporcionan un estándar contra el cual se pueden comparar las decisiones que finalmente se toman.

El análisis de decisiones es un procedimiento que permite a los ejecutivos y administradores justificar las decisiones que se ven obligados a tomar. El proceso se utiliza también para evitar decisiones arbitrarias o inconsistentes, es decir aquellas que se toman sin tener toda la información.

Finalmente se tiene que decir que, no obstante, se utilice el proceso de toma de decisiones, no se pude asegurar que el resultado resulte siempre favorable. En otras palabras las buenas decisiones no necesariamente garantizan buenos resultados.

Los modelos de decisión pueden ser deterministicos cuando el curso de acción no esta sujeto a ninguna incertidumbre, como es el caso de los modelos de programación lineal. De otro lado están los modelos estocásticos en el cual los parámetros del modelo varían debido a la incertidumbre. En este capitulo se analizaran algunos modelos estocásticos de toma de decisiones los cuales pueden clasificarse en dos categorías dependiendo de si la decisión se toma utilizando datos previos o no. Se analizaran diversos modelos de decisión para ambos tipos teniendo cuidado que el modelo sea el apropiado para las circunstancias, ya que el primer paso en una buena decisión es elegir precisamente el modelo apropiado.

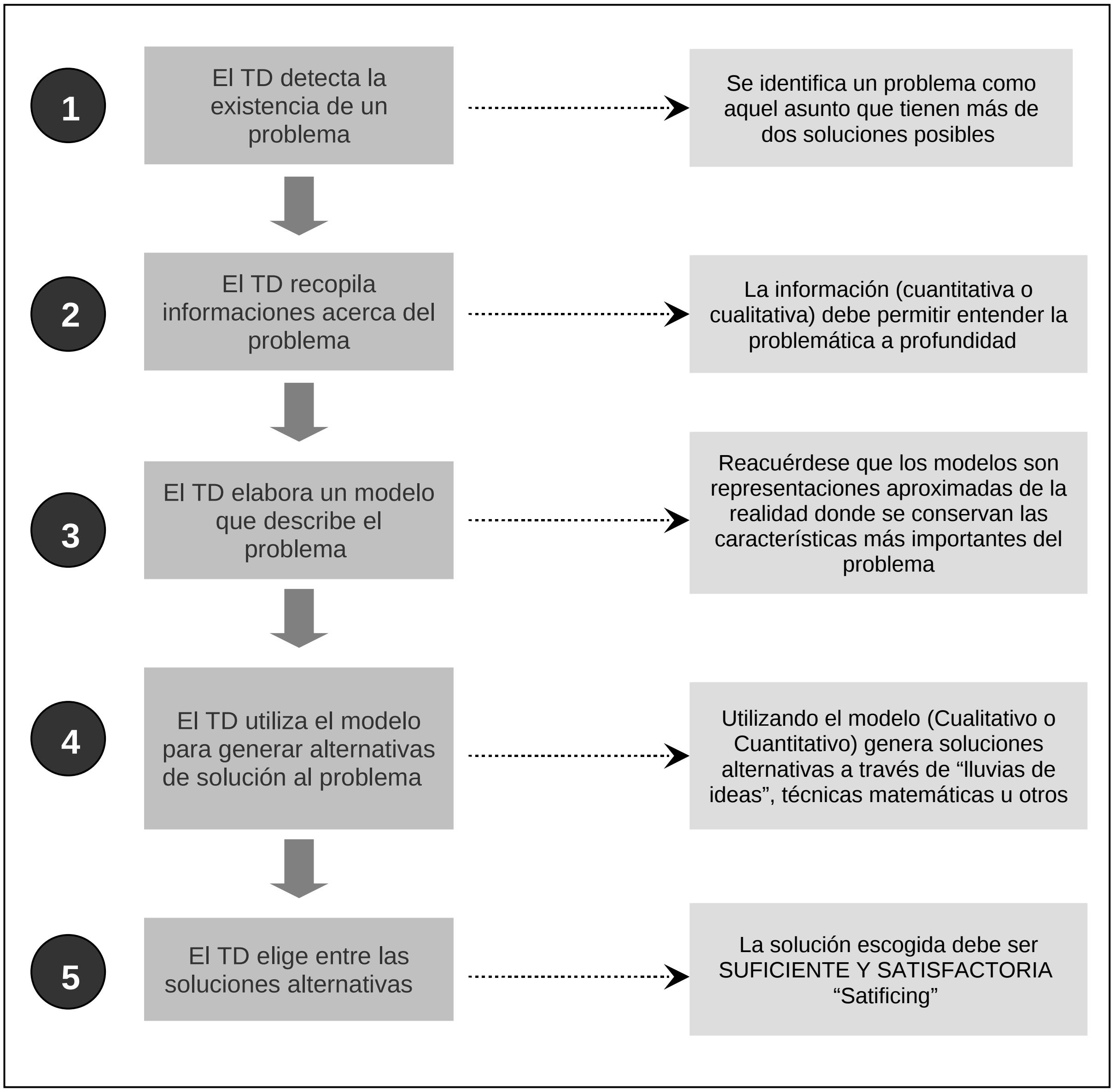
Antes de iniciar el análisis de los distintos modelos es importante que se puntualice sobre el proceso de toma de decisiones, que como se puede ver a continuación se puede asimilar al proceso de solución de problemas que se ha utilizado implícitamente en la aplicación de los modelos analizados en las unidades anteriores.

1. EL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES

Existe la necesidad de elegir la solución para un problema dado cuando al menos existen dos o más alternativas que pueden considerarse como soluciones a dicho problema. Para esto el tomador de decisiones deberá realizar varias acciones antes de poder elegir una alternativa de solución que sea satisfactoria y suficiente para el problema. Las actividades a las cuales se hace referencia son:

- ✓ Detección del problema
- ✓ Recolección de información
- ✓ Elaboración del modelo
- ✓ Generación de alternativas de solución
- ✓ Elección de la solución suficiente y satisfactoria.

Estas actividades se muestran en la Grafica No 1.1 y en su conjunto es lo que se denomina el proceso de toma de decisiones.



Grafica No 1.1 Proceso de Toma de decisiones

2. TIPOS DE DECISIONES Y OTROS ASPECTOS

Básicamente existen tres tipos de decisión, ellas son:

- ✓ La Toma de Decisiones bajo certidumbre
- ✓ La Toma de Decisiones utilizando datos previos
- ✓ La Toma de Decisiones sin datos previos.

En la Tabla No 1.1 se describen cada una de ellas y se indican las condiciones bajo las cuales son aplicadas este tipo de decisiones.

Tipos de Decisiones	**Toma de decisiones bajo Certidumbre**	Son aquellos casos en los cuales existe solo un resultado, es decir aquellos en los cuales la solución del modelo indica el curso de acción que se debe seguir. Es el caso, por ejemplo, de los problemas solucionados a través de modelos de Programación Lineal. En este capitulo no se analizaran este tipo de decisiones ya que ellos se ha trabajado en los capítulos anteriores. En cambio se orientara el estudio a situaciones en las que no se conoce con seguridad el resultado asociado con la decisión; es decir, es posible producir más de un resultado para una sola decisión.
	Toma de decisiones utilizando datos previos	Son decisiones que pueden tomarse de manera repetitiva ya que las circunstancias que rodean la decisión se mantienen similares. De esta forma, con los datos de las experiencias pasadas es posible calcular probabilidades que pueden emplearse para orientar la decisión. Las condiciones necesarias bajo las cuales puede aplicarse este tipo de decisiones son las siguientes: - Las decisiones se toman bajo las mismas condiciones - Existe más de un resultado para cada decisión - Existe experiencia anterior que puede utilizarse para obtener probabilidades para cada resultado.
	Toma de Decisiones sin Datos Previos	Son decisiones únicas. En estos casos no existen datos previos, no existen experiencias previas sobre este problema o similar. Es decir, que no se pueden calcular probabilidades ya que la misma decisión se toma sólo una vez, y como tal, no existe experiencia pasada disponible que ayude en el proceso de toma de decisiones. Para este tipo de problema de decisión es posible utilizarse sólo los resultados de cada decisión para determinar cuál es la decisión que mejor se ajusta a nuestra opinión de los factores externos que rodean el problema (Se construye información particular para decidir sobre la mejor solución al problema particular). O puede decidirse utilizar estimaciones subjetivas (que no se basan en datos previos), conocidas como probabilidades subjetivas, para determinar una decisión.

Tabla No 1.1 Tipos de decisiones

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Lo primero es definir la terminología propia de este tipo de modelos.

✓ **Tomador de decisiones**

Es el individuo o grupo responsable de tomar la decisión que se esta considerando.

- **Las Alternativas**

  Una de las principales actividades del Tomador de Decisiones cuando se enfrenta a la solución de un problema es determinar las alternativas sobre las cuales se va a tomar la decisión final. Es necesario tener en cuenta que no hacer nada, es también una alternativa que debe tenerse en cuenta. Por lo demás, es claro que deben considerar aquellas alternativas que sean viables.

- **Estados de la Naturaleza**

  Son acciones externas que afectan la decisión y que están por fuera de control del Tomador de Decisiones. El concepto primordial que debe recordarse acerca de los estados de la naturaleza, es que se trata de condiciones externas que tienen efecto sobre los resultados. Igual que en la selección de las alternativas, es importante considerar sólo aquellas condiciones del entorno que tienen un efecto significativo sobre los resultados.

- **Probabilidades**

  Expresan las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza.

- **Resultado (Tabla de Pagos)**

  Para cada combinación de alternativa y estado de la naturaleza habrá un resultado, un pago, el cual puede expresarse en términos de utilidades, en términos de valores presentes o puede expresarse en términos de alguna medida no monetaria. Para determinar los resultados es necesario considerar todas las combinaciones posibles de alternativas de decisión y estados de la naturaleza.

- **Árboles de decisión**

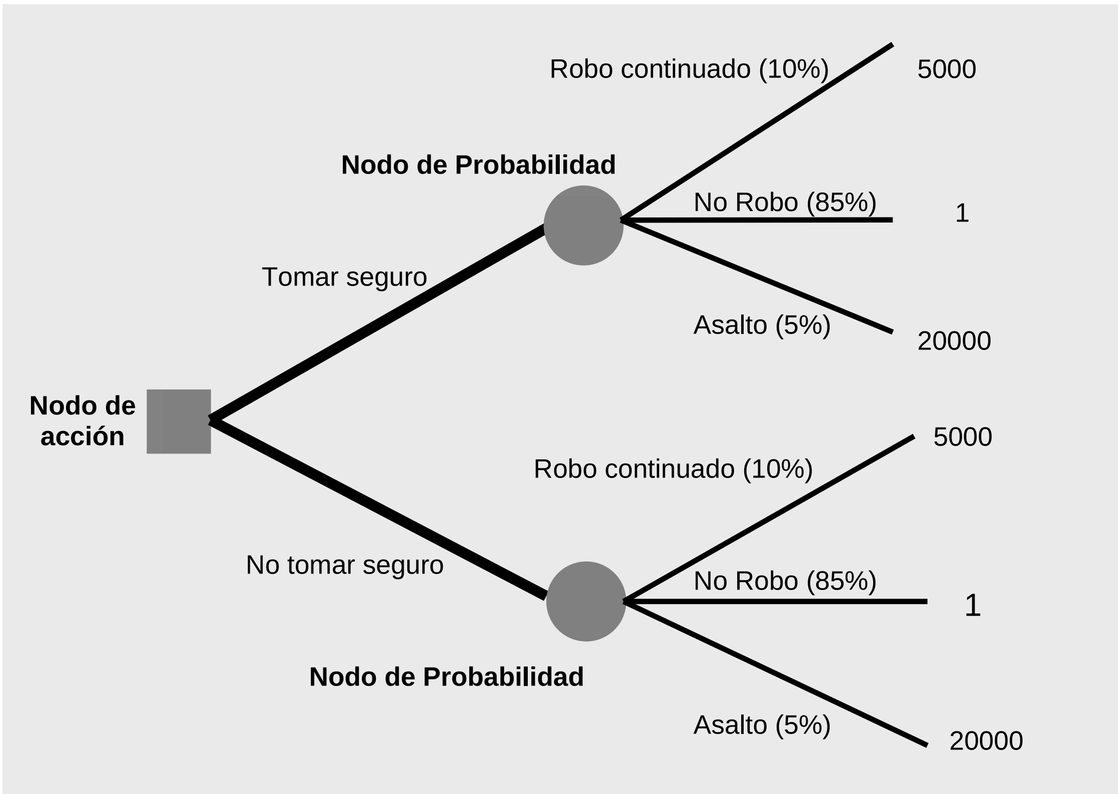
  Una forma clara y sencilla que permite visualizar la estructurar del proceso de toma de decisiones es el árbol de decisión. Esta herramienta está formada por nodos o puntos de unión y las ramas que son las líneas que unen los nodos. A su vez los nodos pueden ser nodos de decisión los cuales se representan por un cuadro () y representarán aquellos lugares del proceso en los que se toma una decisión y los nodos de probabilidad que se denotarán por medio de un círculo (O) e indicarán aquellas partes del proceso en las que ocurre algún estado de la naturaleza. Las ramas se utilizan para denotar las decisiones o las variantes de los estados de la naturaleza. También pueden anotarse probabilidades sobre las ramas para denotar la probabilidad de que ocurra un estado determinado de la naturaleza. Al final de las ramas terminales se colocan los pagos para mostrar el resultado que se obtendría al tomar una decisión particular.

A manera de ejemplo de como se utilizan los Árboles de Decisión en el proceso de Toma de Decisiones considere la siguiente situación, ilustrada en la gráfica No 1.2. Un empresario esta tratando de decidir si debe o no tomar un seguro contra robo, esta decisión se muestra como un nodo de acción. Al final de cada rama que parte del nodo de acción habrá un nodo de probabilidad. Los posibles estados de la naturaleza se muestran a partir de los nodos de probabilidad, sobre cada rama se muestra la probabilidad de que ocurra esta eventualidad. En este caso los estados de la naturaleza son: a) que no haya robo; b) que haya un robo continuado en la bodega del empresario y c) que se presente un asalto a las bodegas. Las probabilidades de ocurrencia de estos sucesos se han tomado de estadísticas del sector al cual pertenece la empresa. Combinando los nodos de acción y los nodos de probabilidad con los pagos para cada combinación se obtiene el árbol de decisión

Estos pagos se colocan al final de las ramas terminales de probabilidad. El empresario ha decidido los siguientes pagos:

- ✓ Tomar el seguro y que haya robo continuado, valor = +5000.
- ✓ Tomar el seguro y que no haya robo, valor = -100.
- ✓ Tomar el seguro y que haya asalto, valor = +20000.
- ✓ No tomar el seguro y que haya robo continuado, valor = -5000.
- ✓ No tomar el seguro y que haya no haya robo, valor = +100.
- ✓ No tomar el seguro y que haya asalto, valor = -20000.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones a continuación se analizaran los modelos de Toma de Decisión usando tanto datos previos, como sin ellos.



Gráfica No 1.2 Árbol de Decisión

4. TOMA DE DECISIONES SIN DATOS PREVIOS

Bajo este apartado se analizan varios modelos de decisión que pueden usarse sin datos previos. No se puede afirmar que un modelo sea más apropiado que otro ya que la aplicación de cada uno de ellos dependerá del Tomador de Decisiones y de las circunstancias que rodean el problema que se esta tratando. De esta forma al analizar cada modelo se describirán las circunstancias bajo las cuales es apropiado su uso o no. Los modelos que se analizaran son los siguientes:

- ✓ Modelo de Decisión del pesimista.
- ✓ Modelo de Decisión del optimista
- ✓ Modelo de minimización del arrepentimiento
- ✓ Modelo de Decisión de maximización del pago promedio

- ✓ Modelo de probabilidades subjetivas

Para ayudar al análisis, se plantea la siguiente situación a la cual se ven enfrentadas las directivas de un centro de educación:

Una universidad esta considerando abrir un nuevo programa del ciclo de profesionalización. Las directivas de la institución han concluido que existen tres posibilidades

a) Mantener el portafolio tal y como esta, es decir: “No Hacer Nada”
b) Abrir el programa de Ingeniería industrial ya que se espera un incremento de la producción del país en los próximos años.
c) Abrir Ingeniería Administrativa ya que se estima que la oferta de este programa caerá en los próximos años.

Con la ayuda de asesores (profesionales en finanzas y estudios de mercados) se han determinado que los valores actuales de cada alternativa son los que se muestran en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que las acciones externas (estados de la naturaleza) son mutuamente excluyentes.

Alternativas	**Estados de la Naturaleza(*)**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

(*) Valores en Miles

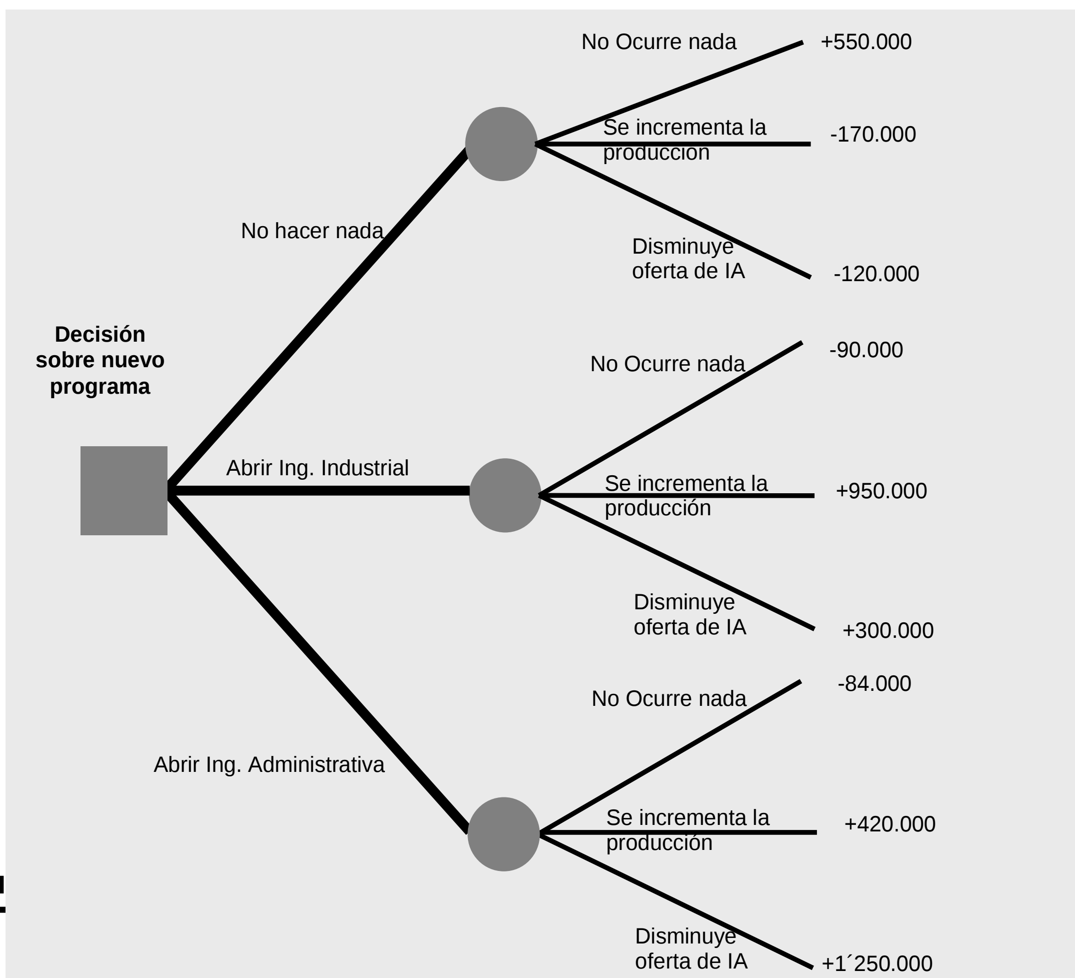
En la gráfica No 1.3, se plantea la problemática anterior a través de un árbol de decisiones. En este caso existen tres ramas de decisión –Alternativas- que corresponden a:

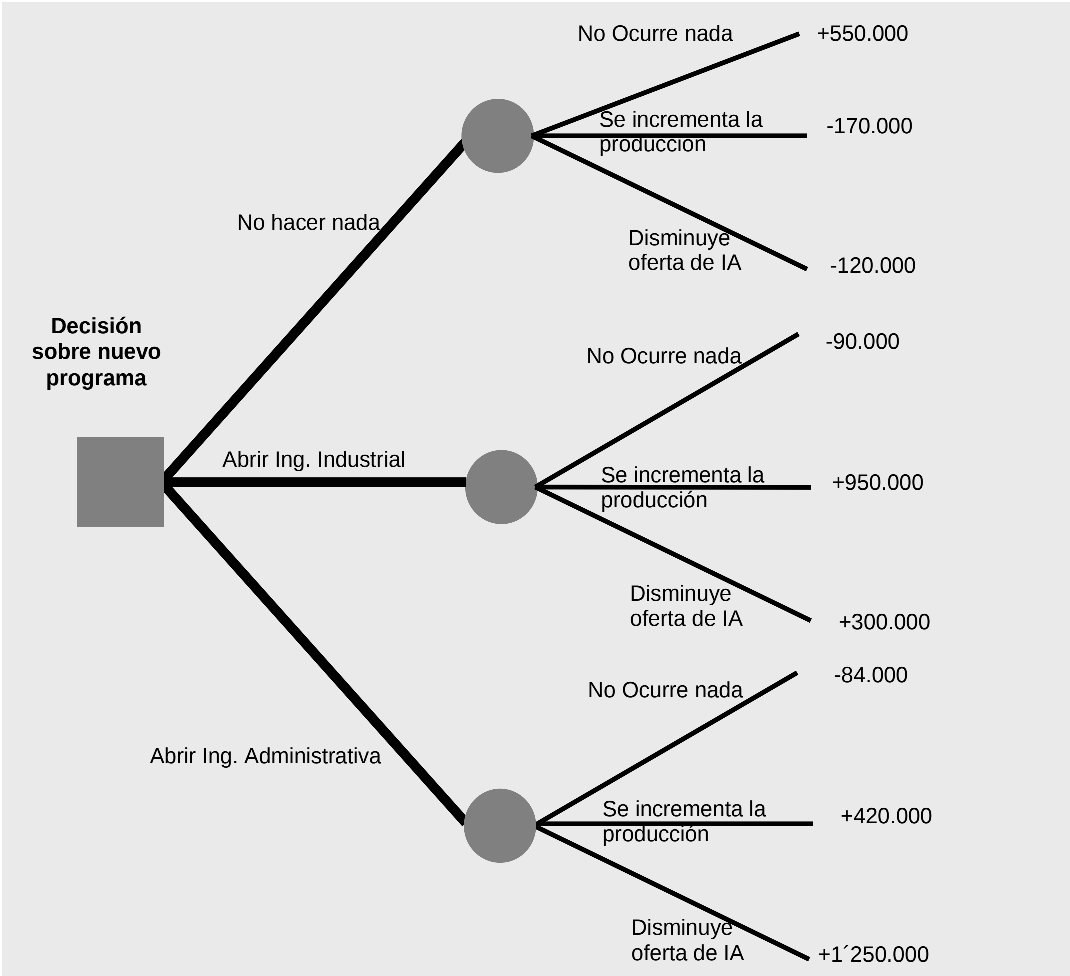
- ✓ No hacer nada,
- ✓ Abrir Ingeniería Industrial y
- ✓ Abrir Ingeniería Administrativa.

Para cada rama de decisión existen tres ramas de estados de la naturaleza asociados con un nodo de probabilidad, estos corresponden a:

- ✓ No ocurre nada,
- ✓ A un incremento de la producción, y
- ✓ A una disminución de la oferta.

Por último para cada combinación de acción y estado de la naturaleza existe un pago el cual se ha colocado en el extremo final de cada una de las ramas terminales.





4.1 Modelo de Decisión del pesimista (Criterio MAXIMIN)

El Modelo de Decisión del Pesimista es utilizado por el Tomador de Decisiones que considera que es más importante evitar altas perdidas, que obtener utilidades; ya sea porque el considera que la situación económica no es favorable o porque tiene la percepción que los estados de la naturaleza que se sucederán no serán los más favorables. Es decir, se habla aquí de una persona de naturaleza pesimista, con alta aversión al riesgo.

Para implementar el concepto de evitar pérdidas, lo que debe hacer el Tomador de Decisiones es, de los pagos, determina el menor resultado para cada alternativa y después se elige la que tenga el mayor de estos resultados menores. El procedimiento puede describirse como sigue:

Paso 1. Determine el menor valor para cada alternativa y regístrelo en una lista.

Paso 2. De la lista de resultados con menor valor elija el de mayor valor. La alternativa asociada con este valor será la que será la elegida en este caso de toma de decisiones.

Para ilustrar la metodología, aplicamos el método al caso del Centro educativo.

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Paso 1. Para cada alternativa se determina el menor valor y se registran en una lista.

Alternativas	**Valor**
No hacer nada	-170.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000

Paso 2. De la lista anterior se escoge la alternativa con mayor valor, es decir Abrir Ingeniería Administrativa, que tiene un pago de -84.000

Nótese que para escoger la alternativa se supone la situación más desfavorable que puede ocurrir, es decir abrir Ingeniería Administrativa cuando no ocurre nada (Estado de la naturaleza). No obstante, esta es una situación más favorable que si no se hace nada y se incrementa la producción

4.2 Modelo de Decisión del Optimista

El modelo de Decisión del Optimista es utilizado cuando el Tomador de Decisiones considera que el medio ambiente es propicio; es decir, que es optimista con respecto al resultado. En este caso el ejecutivo buscará ganar lo máximo. Bajo este criterio se determina el mayor pago para cada alternativa y después se elige el máximo de ellos.

El procedimiento para aplicar el modelo de decisión del optimista es similar al utilizado en el caso anterior, pero considerando los nuevos criterios.

Paso1. Para cada alternativa determine el resultado con el mayor pago y regístrelos en una lista.

Paso 2. Dé la lista de resultados se elige el valor máximo; de esta manera, la alternativa asociada con este resultado máximo es la alternativa que debe seguirse.

Con el fin de ilustrar el método se retoma el caso de la universidad.

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Paso 1. Para cada alternativa se determina el mayor valor y se registran en una lista.

Alternativas	**Valor**
No hacer nada	+550.000
Abrir Ingeniería Industrial	+950.000
Abrir Ingeniería Administrativa	+1´250.000

Paso 2. De la lista anterior se escoge la alternativa con mayor valor, es decir **Abrir Ingeniería Administrativa**, que tiene el mayor pago 1´250.000

Nótese que quien toma las decisiones podría también haber decidido utilizar este modelo en una situación en la que la cantidad de dinero que puede perderse (pagos negativos) es pequeña en comparación con la utilidad que puede alcanzarse. En estos casos, se supone que quien toma las decisiones puede permitirse las pérdidas que podrían ocurrir si se utiliza el modelo del optimista.

4.3 Modelo de Decisión de Minimización del Arrepentimiento

El Modelo de Decisión de Minimización del Arrepentimiento al igual que el modelo del pesimista es utilizado por un Tomador de Decisiones que tiene una opinión bastante pesimista del medio ambiente. El modelo es también conocido como minimización de las perdidas de oportunidad.

Para entender la forma de aplicar este modelo se debe definir previamente el concepto de Pérdida de Oportunidad. La pérdida de oportunidad se define como la diferencia entre el pago máximo de un estado de la naturaleza determinado, con el pago de una alternativa escogida para este estado de la naturaleza. Es decir si se elige una estrategia que dé como resultado un pago inferior al máximo para un estado de la naturaleza en particular, entonces se incurre en una pérdida de oportunidad que es igual a la diferencia entre el pago más alto y el pago que se da con la estrategia elegida, y se siente arrepentimiento. Matemáticamente para un estado determinado de la naturaleza,

Pérdida Oportunidad = Pago Máx. - Pago Alternativa Seleccionada (1)

En conclusión la pérdida de oportunidad es la cantidad que se pierde cuando la alternativa elegida no es la mejor. Si la decisión conduce al pago más alto para un estado de la naturaleza particular nótese que no hay pérdida de oportunidad y por consiguiente no hay lugar al arrepentimiento.

El procedimiento para aplicar el Modelo de Decisión de Minimización del Arrepentimiento, es el siguiente:

Paso 1. Para cada estado de la naturaleza:

a) Determine el pago más alto.

b) Calcule las pérdidas de oportunidad para cada alternativa, utilizando la ecuación (1).

c) Coloque estos valores de pérdida de oportunidad en una tabla de arrepentimientos.

Paso 2. Para cada alternativa de la tabla de arrepentimientos, determine la pérdida máxima de oportunidad y coloque este valor en una lista.

Paso 3. De la lista hallada en el paso 2 determine la mínima de las pérdidas máximas de utilidad. La alternativa correspondiente es la que debe elegirse.

Para ilustrar la aplicación del modelo, se retoma el caso del centro de enseñanza al cual se aplica el Modelo de Decisión de Minimización del Arrepentimiento.

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000

Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Paso 1. Para cada estado de la naturaleza.

a) Determine el mayor pago (Celdas oscuras de la tabla anterior)

b) Calcule las perdidas de oportunidad para cada alternativa

En la tabla de arrepentimiento, se calculan las Perdidas de Oportunidad para cada alternativa, utilizando la ecuación (1)

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	0	1´120.000	1´370.000
Abrir Ingeniería Industrial	640.000	0	950.000
Abrir Ingeniería Administrativa	634.000	530.000	0

Paso 2. Para cada alternativa de la tabla de arrepentimiento, determine la pérdida máxima de oportunidad y coloque este valor en una lista. Para el caso del ejemplo la tabla es la siguiente:

Alternativas	**Máxima pérdida de oportunidad**
No hacer nada	1´370.000
Abrir Ingeniería Industrial	950.000
Abrir Ingeniería Administrativa	634.000

Paso 3. Utilizando la lista anterior, se escoge como la mejor alternativa aquella que tiene la menor de las pérdidas máximas de utilidad. Para el caso del ejemplo la alternativa mejor es **“Abrir Ingeniería Administrativa”** ya que esta es la menor perdida de oportunidad.

Como se puede observar en la aplicación anterior, en este modelo el Tomador de Decisiones busca evitar pérdidas elevadas de oportunidad a través de un análisis minimáx de la tabla de arrepentimientos. Al hacer esto, quien toma las decisiones minimiza la diferencia máxima que puede ocurrir entre la mejor alternativa para un estado determinado de la naturaleza y cada uno de los resultados. Al elegir una alternativa quien toma las decisiones se asegura de minimizar el arrepentimiento máximo o pérdida de oportunidad

4.4 Modelo de Decisión de Maximización del Pago Promedio

Cuando el Tomador de Decisiones se enfrenta a elegir entre varias alternativas en las que cada alternativa tiene a su vez resultados múltiples, debido a los diferentes estados de la naturaleza, éste puede optar por encontrar el pago promedio para cada alternativa y elegir la que tenga el mayor pago promedio.

El Valor Promedio para la alternativa ***i*** (VP_i) se calcula como la sumatoria de los pagos (P_{ij}) de la alternativa ***i*** dividida por el número de pagos (**n**).

Matemáticamente, como: $\mathbf{VP_i = (^1/_n) \sum P_{ij}}$, (2) Donde **j** varía desde **1** hasta **n**

El procedimiento para aplicar el Modelo de Decisión de Maximización del Pago Promedio, es el siguiente:

Paso 1. Para cada alternativa calcule el pago promedio para todos los estados de la naturaleza y coloque estos valores en una lista

Paso 2. De la lista de pagos promedio determine el mayor valor y la alternativa que corresponde a este pago es la que debe seleccionarse.

A primera vista parecería que este modelo de decisión no depende de las probabilidades; no obstante, cuando se calcula el promedio de pagos se esta suponiendo que la probabilidad de ocurrencia de cada estado de la naturaleza es igual. Es decir que se ha supuesto de que ocurra cada resultado es igual a (1/n) en donde n es el número de resultados.

Para ilustrar la aplicación del modelo, como en los casos anteriores, se retoma el caso del centro educativo.

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	No ocurre nada	**Se incrementa la producción**	**La oferta de programas de IA disminuye**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000

Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Paso 1. Para cada alternativa calcule el pago promedio para todos los estados de la naturaleza y coloque estos valores en una lista. Para el ejemplo:

Alternativas	**Pago Promedio de cada alternativa**
No hacer nada	(550.000-170.000-120.000)/3 = **86.666,66**
Abrir Ingeniería Industrial	(-90.000+950.000+300.000)/3 = **386.666,66**
Abrir Ingeniería Administrativa	(-84.000+420.000+1´250.000)/3 = **528.666,66**

Paso 2. De la lista de pagos promedio determine el mayor valor y la alternativa que corresponde a este pago es la que debe seleccionarse. Para el ejemplo se elige la Alternativa **"Abrir Ingeniería Administrativa"**

4.5 Modelo de Decisión con Probabilidades Subjetivas

Aunque sin datos previos no se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso –Estado de la naturaleza- es común encontrar en la vida práctica que el Tomador de Decisiones asigna probabilidades a priori. Es decir que él, desde un juicio personal, apuesta a la ocurrencia o no de un hecho ya sea por la experiencia o por las percepciones que lo acompañan o cualquiera otra circunstancia.

De otro lado, si los pagos representan la ganancia o pérdida que cada alternativa producirá de acuerdo a que ocurra o no un estado de la naturaleza, entonces será posible determinar el Valor Esperado (VE) de cada alternativa como el promedio ponderado de pagos para ella. Matemáticamente:

$\mathbf{VUE}_i = \sum \mathbf{Po}_{ij}\mathbf{P}_{ij},$ (3) Donde **j** varía desde **1** hasta **n**

Siendo **n** el número de estados de la naturaleza a los cuales se somete la decisión.

El procedimiento para aplicar el Modelo de probabilidades subjetivas, es el siguiente:

Paso 1. Para cada alternativa calcule el Valor Esperado (VUE) y coloque estos valores en una lista

Paso 2. De la lista de Valores Esperados determine el mayor Valor Esperado (VE) y la alternativa que corresponde a dicho valor es la que se deberá seleccionar.

La toma de decisiones teniendo en cuenta este criterio, se ilustra a través del caso del la Universidad. Para esto se ha supuesto que el Tomador de Decisiones ha asignado la probabilidad de que ocurran los estados de la naturaleza como se muestra en la tabla

Alternativas	**Estados de la Naturaleza Probabilidades Estimadas de Ocurrencia**		
	No ocurre nada Po = 40%	**Se incrementa la producción – Po =30%**	**La oferta de programas de IA disminuye Po = 30%**
No hacer nada	+550.000	-170.000	-120.000
Abrir Ingeniería Industrial	-90.000	+950.000	+300.000
Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Paso 1. Para cada alternativa calcule el Valor Utilitario Esperado (VUE) y coloque estos valores en una lista, para el ejemplo:

Alternativas	**Valor Esperado (VE)**
No hacer nada	(550.000)(0.4)+(-170.000)(0.3)+(-120.000)(0.3) = **133.000**
Abrir Ingeniería Industrial	(-90.000)(0.4)+(950.000)(0.3)+(300.000)(0.3) = **339.000**
Abrir Ingeniería Administrativa	(-84.000)(0.4)+(420.000)(0.3)+(1´250.000)(0.3) = **467.400**

Paso 2. De la lista de Valores Esperados (VE) determine el mayor valor y la alternativa que corresponde a este pago es la que debe seleccionarse. Para el ejemplo se elige la Alternativa **"Abrir Ingeniería Administrativa"**

4.6 Resumen de la Aplicación de los modelos de Decisión

En la tabla 1.2 se resumen los resultados encontrados para el caso del centro educativo.

Modelo de Decisión	**Alternativa Escogida**	**Estados de la Naturaleza –Pagos-**		
		No Ocurre Nada	**Se incrementa la producción**	**Disminuye la oferta de Ing. Administrativa**
Del Pesimista	Abrir Ingeniería	-84.000	+420.000	+1´250.000

	Administrativa			
Del Optimista	Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000
Minimización del arrepentimiento	Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000
Maximización del pago Promedio	Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000
Probabilidades Subjetivas	Abrir Ingeniería Administrativa	-84.000	+420.000	+1´250.000

Tabla 1.2 Resumen de la Aplicación de los modelos de Decisión

Nótese que todos los Modelos coinciden y conducen a que el Tomador de Decisiones se decida por la alternativa de "Abrir Ingeniería Administrativa"

4.7 Consideración acerca de los Modelos de Decisión

En general, los resultados de la aplicación de los modelos de decisión no deben ser tomados como una camisa de fuerza; por el contrario deben ser sometidos a un análisis juicioso y razonable con el fin de no incurrir en errores al momento de escoger la mejor alternativa.

El modelo de los Pagos Promedios, por ejemplo, puede conducir a errores. Para ilustrar esta situación considere el siguiente ejemplo:

Alternativas	**Estados de la Naturaleza**		
	N1	**N2**	**N3**
A1	+6000	0	0
A2	+1500	+900	+3500

Al aplicar el Modelo de los Pagos Promedio el Tomador de Decisiones debería escoger la alternativa A1 ya que esta tiene un pago promedio (2000) mayor a la alternativa A2 (1966). No obstante un análisis juicioso de la situación conduce a pensar que la alternativa A2 es más razonable ya que ante la ocurrencia de cualquiera de los estados de la naturaleza existen pagos positivos, a cambio de la alternativa A1 donde para los estados N2 y N3 el pago es 0.

Para el caso del Modelo del pesimista, podría suceder una situación similar, supongamos la siguiente situación:

Alternativas	Estados de la Naturaleza	
	N1	N2
A1	-100	500.000
A2	-10	0

Al aplicar el modelo del pesimista se debería escoger la alternativa A2 que es la que tiene el mayor pago de los más desfavorables. No obstante al hacerse esta elección se esta ignorando el pago positivo de 500.000 que existe para la alternativa A1.

Otra situación que ilustra la necesidad de evaluar los resultados es el caso del Modelo de probabilidades subjetivas. Para el ejemplo que se analizo, por ejemplo si se hubieran considerado unas probabilidades diferentes, como por ejemplo 50% para el estado de que la producción se incremente y 10% para el estado de que la oferta de Ingeniería Administrativa se disminuya, la alternativa escogida debería ser la de “Abrir Ingeniería Industrial” ya que su Valor Esperado es mayor (469.000). Un análisis de sensibilidad permite conocer en estos casos que tan alegada esta una decisión de otra.

Análisis de Sensibilidad

Las variaciones de las probabilidades de que ocurra un estado de la naturaleza, como se ha visto, pueden conducir a que se altere una decisión. Con el fin de verificar la proximidad de dicha alteración se realiza un análisis de sensibilidad variando las probabilidades de los diferentes eventos. Para el caso que se viene tratando se supone que la probabilidad de que no ocurra nada se mantiene inalterable y las probabilidades de que se “Incremente la producción” y se “Disminuya la oferta de Ingeniería Administrativa” varíen proporcionalmente entonces se puede determinar, a través del VE, para que probabilidad se pasa de escoger la alternativa Abrir Ing. Administrativa a Abrir Ing. Industrial. La situación anterior se muestra en la tabla No 1.3

Estados de la Naturaleza Probabilidad			Alternativa Valores Esperados (VE)		
No pasa nada	Se incrementa la producción	Se disminuye la oferta	No hacer nada	Abrir Ing. Industrial	Abrir Ing. Administrativa

40%	30%	30%	133.000	339.000	467.400
40%	32%	28%	132.000	352.000	450.800
40%	35%	25%	130.500	371.500	425.900
40%	37%	23%	129.500	384.500	409.300
40%	38%	22%	129.000	391.000	401.000
40%	38.5%	21.5%	128.750	394.250	396.850
40%	38.7%	21.3%	128.650	395.550	395.190
40%	39%	21%	128.500	397.500	392.700

Tabla 1.3 Análisis de sensibilidad para el caso de la universidad

Nótese que a partir de una probabilidad del 38.7% de que se "Incremente la producción", la alternativa que se debe elegir es "Abrir Ingeniería Industrial". De este modo si la asignación de probabilidades hecha por el Tomador de Decisiones no esta suficiente justificada no hay mucha diferencia entre escoger cualquiera de las dos alternativas, bajo el modelo de probabilidades subjetivas. En estos casos el responsable de la decisión deberá considerar otros criterios.

5. TOMA DE DECISIONES UTILIZANDO DATOS PREVIOS

Se denominan Decisiones con datos previos aquellos casos que se repiten periódicamente bajo condiciones similares, en las cuales el Tomador de Decisiones se puede valer de las experiencias pasadas para elegir la mejor alternativa al problema que se intenta solucionar.

Igual que en caso anterior, para esta situación, el análisis se ilustra a través de un caso particular. Suponga que el gerente de un equipo de fútbol quiere saber cuantas boletas debe poner en venta para el juego del próximo domingo. El costo por boleta puesta en los expendios y no vendida es de $100 y la ganancia por cada boleta vendida es de $500. De otro lado, el gerente ha podido determinar que históricamente cuando el equipo se encuentra en la mitad de la tabla de posiciones, el tiempo es lluvioso y época de vacaciones, la demanda de boletería ha sido la que se muestra en la tabla 1.4. Si las condiciones son similares a las que se describen, el gerente quiere conocer: ¿Cuántas boletas debe poner a disposición del publico, con el fin de maximizar las ganancias?

Número de Boletas demandadas	20.000	22.000	23.000	24.000	26.000	30.000	35.000
Numero de veces	13	25	55	42	35	25	5

que se presento							

Tabla No 1.4 – Frecuencia en la demanda de Boletas para Fútbol

Bajo condiciones diferentes, por ejemplo: cuando el equipo este de primero, se estén disputando las finales del campeonato, el clima sea más favorable, etcétera, no sería apropiado utilizar esta información para determinar el número de boletas que deben ponerse a disposición del publico, pues seguramente la decisión no será la más apropiada.

Cuando existen datos previos, como el caso que se acaba de describir, existen dos métodos que permiten analizar la información con el fin de tomar la mejor decisión. Ellos son: el método clásico y el Bayesiano

5.1 Análisis Clásico

En la aplicación de esta metodología los datos previos –Históricos- se utilizan para elaborar una regla de decisión. Una vez establecida la regla de decisión se realiza una prueba o se toma una muestra y con base en ella se toma la decisión correspondiente. Por ejemplo para el caso del equipo de fútbol, puede determinarse la demanda esperada como:

Calculo de la Demanda Esperada

20.000	22.000	23.000	24.000	26.000	30.000	35.000		Asistencia
13	25	55	42	35	25	5	200	Fecuencia /Total
0,065	0,125	0,275	0,21	0,175	0,125	0,025		Probabilidad de ocurrencia
1300	2750	6325	5040	4550	3750	875	**24590**	**Demanda Esperada**

Con base en esta demanda esperada el gerente del equipo de fútbol podría esperar que la demanda excediera, en promedio, las 24.000 personas por partido. Para probarse esta expectativa, puede utilizarse el análisis clásico.

Primero se plantea una Hipótesis Nula utilizando el valor esperado que se calculó con los datos previos:

Ho = $\mu \geq 24.000$

La hipótesis nula dice que los datos previos indican que la demanda promedio a largo plazo, o media será mayor o igual a 24.000 personas. Utilizando los datos previos se plantea una hipótesis alternativa de que la demanda es menor de 24.000 personas, es decir que la demanda es inferior a 24.000 personas.

$H_1 = \mu < 24.000$

Para acercar la demanda a un valor real, que permita tomar una decisión lo más acertada posible, se toma una muestra de los valores de la demanda para cierto número de partidos. Con base en esta muestra se puede aceptar la hipótesis nula y asegurar que la demanda media del equipo de fútbol es de 24.000 o más personas por partido. De otro lado, la muestra podría conducir a rechazar la hipótesis nula y a afirmar que, después de todo, la demanda promedio en realidad no es de 24.000 o más personas.

Como se puede deducir de lo anterior el método es poco práctico y económico. La necesidad de validar la hipótesis a través de muestras implica que se requiera mucho tiempo y recursos económicos antes de poder decidir como solucionar el problema que se trata de resolver. Es por este motivo se recurre al Análisis Bayesiano el cual es un método un poco más practico y económico para la toma de decisiones con datos previos

5.2 Análisis Bayesiano

Para este análisis se construye una matriz de decisión con las consecuencias económicas de diversas decisiones, con esta matriz se realiza un análisis previo, seguidamente se hace un segundo análisis con el cual se intenta determinar si resulta útil llevar a cabo pruebas o muestras adicionales. Si de este último análisis se demuestra que las pruebas o las muestras serían útiles y económicamente viables, entonces se realizan.

En caso de realizarse la prueba o tomarse la muestra los resultados son utilizados para modificar las probabilidades previas, obteniendo así nuevas probabilidades después de la prueba, es decir que estas probabilidades posteriores combinan tanto los datos previos como los resultados de la prueba.

Nótese que al comparar el análisis clásico con el bayesiano, se observa que en el primero siempre se procede a realizar una prueba o a recolectar una muestra, pero en el análisis Bayesiano sólo se hace esto después de un primer análisis que permite determinar la conveniencia de hacer pruebas o muestras adicionales siempre y cuando sea económicamente viable. La decisión de probar o no combinada con la modificación de las probabilidades con base en las pruebas, es lo que hace que el análisis Bayesiano tenga ventajas con respecto al análisis clásico ya que esto implica un proceso más económico.

Para realizar el análisis Bayesiano, inicialmente se crea la matriz de decisión que muestra las consecuencias económicas de las diferentes alternativas. En la matriz se incluyen los pagos para cada estado de la naturaleza y cada alternativa, y la probabilidad de ocurrencia de cada estado de la naturaleza la cual se calcula como la razón entre el número de veces de ocurrencia histórica y el número total de datos. Seguidamente para cada alternativa se calcula el Valor Medio Esperado (VME) como la suma ponderada de las consecuencias económicas, escogiéndose la alternativa con el mayor VME. A continuación se indica el procedimiento paso a paso para este modelo:

Paso 1. Elabore la matriz de decisión, calculando para cada alternativa las consecuencias económicas bajo cada estado de la naturaleza.

Paso 2. Calcule las probabilidades de ocurrencia de cada alternativa para cada estado de la naturaleza.

Paso 3. Calcule el VME para cada alternativa, como $VME_i = \sum P_{ij}\ Po_j$; siendo P_{ij} el pago para la alternativa i en el estado de la naturaleza j y Po_j la probabilidad el estado de la naturaleza j.

Paso 4. Elabore una lista con cada uno de los VME.

Paso 5. La alternativa que corresponde al mayor valor de VME es la alternativa que debe seleccionarse.

A continuación se realiza el análisis Bayesiano para el caso del equipo de futbol.

Paso 1. Elabore la matriz de decisión, calculando para cada alternativa las consecuencias económicas bajo cada estado de la naturaleza

Número de Boletas que se ponen a la venta	Número de Boletas que se venden (Pagos en Millones)						
	20.000	**22.000**	**23.000**	**24.000**	**26.000**	**30.000**	**35.000**
20.000	10 (*)	10	10	10	10	10	10
22.000	9.8	11	11	11	11	11	11
23.000	9.7	10.9	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5
24.000	9.6	10.8	11.4	12	12	12	12
26.000	9.4	10.6	11.2	11.8	13	13	13
30.000	9	10.2	10.8	11.4	12.6	15	15
35.000	8.5	9.7	10.3	10.9	12.1	14.5	17.5
Probabilidad ocurrencia	6.5%	12.5%	27.5%	21%	17.5%	12.5%	2.5%

(*) Valores en millones

Para el cálculo de los pagos se razona de la siguiente manera:

Si se ponen en venta 20.000 boletas y ocurre que se venden 20.000 el resultado económico se calcula como el producto de las boletas vendidas por la ganancia, es decir: 20.000 x 500 = 10´000.000. De igual forma si se ponen en venta 20.000 y la demanda es mayor el efecto económico no varia, es decir la ganancia sigue siendo de 10´000.000.

En cambio cuando se ponen en venta 22.000 boletas y ocurre que solo se venden 20.000, a la ganancia hay que restarle una pérdida por dejar de vender 2.000 boletas, las cuales tienen un costo para el equipo de fútbol de 100 cada una. Es decir, que el resultado económico se calcula como:

(20.000 x 500) – (2.000 x 100) = 9´800.000

De manera similar se deben calcular los demás pagos.

Paso 2. Calcule las probabilidades de ocurrencia de cada alternativa para cada estado de la naturaleza

El cálculo de la probabilidad se realiza como la razón entre el número de veces que ocurre el estado de la naturaleza y el número total de datos con los cuales se cuenta. Para cuando se venden 20.000, por ejemplo, el número de veces que ocurre es 13 y la probabilidad se calcula como:

P_{20000} = (13) / (200) = 0,065, es decir: 6,5%

De manera similar se calculan las demás probabilidades.

Para el cálculo del VME de cada alternativa se ponderan los pagos de cada estado de la naturaleza de acuerdo a probabilidad de ocurrencia.

								VME
20.000	10	10	10	10	10	10	10	**10**
22.000	9,8	11	11	11	11	11	11	**10,922**
23.000	9,7	10,9	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	**11,308**
24.000	9,6	10,8	11,4	12	12	12	12	**11,529**
26.000	9,4	10,6	11,2	11,8	13	13	13	**11,719**
30.000	9	10,2	10,8	11,4	12,6	15	15	**11,679**
35.000	8,5	9,7	10,3	10,9	12,1	14,5	17,5	**11,254**
Probabilidad ocurrencia	0,065	0,125	0,275	0,21	0,175	0,125	0,025	

Paso 4. Elabore una lista con cada uno de los VME.

	VME
20.000	**10**
22.000	**10,922**
23.000	**11,308**
24.000	**11,529**
26.000	**11,719**
30.000	**11,679**
35.000	**11,254**

Paso 5. La alternativa que corresponde al mayor valor de VME es la alternativa que debe seleccionarse. Es decir que para el caso que se estudia, la solución es poner a la venta 26.000 boletas

5.3 El valor de Información Perfecta

Después del análisis Bayesiano surge la pregunta: ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el Tomador de Decisiones para obtener información perfecta?; es decir información que le permita tomar decisiones bajo circunstancias reales.

Antes de contestar esta pregunta, se debe conocer cual es el valor de la información perfecta. A su vez para calcular este valor se debe partir del siguiente razonamiento, si sabemos con exactitud el estado de la naturaleza que se presentara es fácil determinar la alternativa que debe elegirse ya que se elegirá la alternativa que produce el mayor pago para cada estado de la naturaleza.

En el caso del equipo de fútbol, por ejemplo, para un número determinado de demanda de boletas se elegirá poner a la venta el número de boletas que maximizara las utilidades netas. Para la situación en la que se supiera que habría una demanda de 22.000 boletas, las utilidades máximas ocurrirían si se ponen a la venta 22.000 boletas, las cuales serían de 11 millones. Si se calcula esto para cada estado de la naturaleza se generaría la lista que aparece en la tabla 1.5

Boletas que se demandan (Estados de la Naturaleza)	Decisión con pago máximo	Pago (millones)
20.000	20.000	10
22.000	22.000	11
23.000	23.000	11.5
24.000	24.000	12
26.000	26.000	13
30.000	30.000	15
35.000	35.000	17.5

Tabla 1.5 Pagos máximos (En millones)

El Valor Monetario Esperado para el caso de la Información Perfecta se puede calcular utilizando los pagos máximos y las probabilidades para cada estado de la naturaleza. Para el caso que se viene analizando de la tabla 1.5 el VME_{IP} se calcula de la siguiente manera.

$VME_{IP}=(10)(0.065)+(11)(0.125)+(11.5)(0.275)+(12)(0.21)+(13)(0.175)+(15)(0.125)+(17.5)(0.025)$

$\mathbf{VME_{IP} = 12.295}$

Esto significa que si se conociera con anticipación el estado de la naturaleza que ocurrirá y se eligiera cada vez la decisión que da las máximas utilidades, la utilidad promedio a largo plazo que se obtendrá sería de 12.295 millones. Matemáticamente esto se puede plantear de la siguiente manera.

$\mathbf{VME_{IP} = \sum P^{*}_{ij.}\, Po_{J\,;}}$

Donde $\mathbf{P^{*}_{ij.}}$ es la máxima utilidad para cada estado de la naturaleza y $\mathbf{Po_J}$ es la probabilidad para cada estado de la naturaleza.

Teniendo en cuenta lo anterior, el valor de la información perfecta se calcula como el Valor Monetario Esperado para la información Perfecta y ese mismo valor monetario sin información perfecta

$\mathbf{VIP = VME_{IP} - VME_{IP}*}$

Donde:

VIP = Valor de la Información Perfecta

VME_{IP} **=** VME para la información perfecta

VME_{IP}* **=** VME máximo sin información perfecta

En el caso del equipo del fútbol el VME_{IP} **=** 12.295 y VME_{IP}*= 11.719, por lo que el VIP = 12.295 – 11.719 = 0.576. Esto significa que el gerente del equipo estaría dispuesto a pagar hasta 576.000 por cada vez, con el fin de conocer con exactitud cual será la demanda de boletería. Esto quiere decir que si la información no es perfecta o si esta tiene un mayor costo entonces el debe tener que decidir sin conocer esta información adicional anticipada.

5.4 El valor de Información de Prueba

En la práctica la información perfecta no es viable en consideración a que en general la información proviene de algún procedimiento imperfecto de prueba. Es decir, que la información de prueba no siempre pronostica correctamente el estado de la naturaleza que ocurrirá. Por ejemplo un comerciante, bastante conocedor de su negocio, con base en un estudio del mercado, pronostica una demanda de los productos que vende y aún así este estado de la naturaleza podría ocurrir solo el 75% de las veces que se hace esta predicción.

En consideración a que la información obtenida de las pruebas no permite predecir con exactitud, el cálculo del valor de la información de prueba es algo más complejo que para la información perfecta.

A continuación, de manera general, se describe el procedimiento para calcular el valor de la información de prueba:

Paso I. Elaborar una tabla de probabilidades de prueba, es decir, **P(R | N)** {P(El resultado de la prueba será R | el resultado real fue N)} y un conjunto de probabilidades previas **P(N)**, para cada estado de la naturaleza.

Paso 2. Para cada renglón de la tabla de probabilidades de prueba, multiplicar cada elemento por la probabilidad previa correspondiente de estado de la naturaleza,

P(N). Cada producto es elemento de una tabla modificada de probabilidades, **P(R** | **N) P(N)**. La suma de estas probabilidades para cada renglón es ahora **P(R)**

Paso 3. Dividir cada elemento de la matriz de probabilidades modificada entre la suma de su renglón, es decir, **P(R** | **N) P(N) / P(R)**, para obtener los elementos de la tabla de pronósticos, **P(N | R)**.

Paso 4. Utilizando la matriz de pago calcular por separado el **VME** máximo para cada resultado de prueba, utilizando las probabilidades del renglón de la matriz de predicción que corresponde a ese resultado de prueba.

Paso 5. Utilizando los **VME** máximos para cada resultado de prueba, calcular el **VME** (de la prueba) multiplicando el **VME** máximo para cada resultado de prueba por la probabilidad de que ocurra ese resultado, **P(R),** y sumando todos estos resultados.

Paso 6. Calcular el valor neto de la prueba determinando la diferencia entre el **VME** de la prueba calculado en el paso 5 y el **VME** máximo posible sin la prueba.

La persona interesada en conocer la forma práctica de calcular el valor de la información de prueba se puede referir a la bibliografía dada al final del capitulo; en especial en el libro de Davis y Mckeown "Modelos Cuantitativos para administración" se hace un tratamiento de este tema bastante completo y claro.

ACTIVIDADES DE RECONOCIMIENTO

Las siguientes actividades tienen por objeto identificar el conocimiento previo que los estudiantes deben tener para abordar el estudio del Algebra Lineal y los Métodos Cuantitativos. Las actividades son especificadas a continuación para cada una de las unidades temáticas. Si no reconoce algunos de los temas planteados no se desespere, lo importante es que esto le sirva de guía para abordar el estudio de una manera mas consciente; así como enfatizar aquellos temas donde se sienta más inseguro.

UNIDAD 1. Introducción al Algebra Lineal

Para lograr un mayor entendimiento del tema algebra lineal el estudiante debe poder conceptuar sobre: ecuaciones, variables, sistema, plano cartesiano, modelo, linealidad; y conceptos básicos empresariales como utilidad, ganancia, precio, producción, inversión, interés, rendimientos, oferta, demanda, entre otros. Además, debe estar en capacidad de resolver ecuaciones; manipular expresiones algebraicas, hacer representaciones en el plano cartesiano y hacer uso básico de una hoja de cálculo, como Microsoft EXCEL.

UNIDAD 2. Programación Lineal

Además de los enunciados en la unidad anterior el estudiante debe poder conceptuar sobre desigualdades, administrativos como: planeación, recursos humanos y materiales, portafolio de inversiones, costos, gastos y utilidad. Debe también estar en capacidad de manipular desigualdades y matrices con sus operaciones básicas; igualmente debe estar en capacidad de hacer uso de una hoja de cálculo electrónica.

UNIDAD 3. Teoría de líneas de Espera

Para esta unidad los estudiantes deben tener conocimientos básicos de estadística, en particular debe poder conceptuar sobre: población, muestra, eventos aleatorios y deterministicos, probabilidad, distribución de probabilidad; además en lo administrativo, conceptuar sobre costos, gastos y utilidades. Debe estar en capacidad de calcular probabilidades a partir de unos antecedentes, resolver ecuaciones y utilizar hojas electrónicas de cálculos.

UNIDAD 4. Teoría de Decisiones

Para esta unidad en particular los estudiantes deben tener conocimientos básicos de estadística descriptiva e inferencia estadística; en particular debe estar en capacidad de reconocer: población, muestra, media, mediana, moda, desviación estándar, probabilidad, distribuciones, pruebas de hipótesis estadísticas, entre otros asuntos estadísticos. Además, debe poder identificar el proceso racional de toma de decisiones realizar cálculos de probabilidades, resolver ecuaciones y utilizar hojas electrónicas de cálculos.

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

UNIDAD 1. Introducción al Algebra Lineal

Capitulo 1 – Sistemas Lineales

1. Resuelva los siguientes sistemas lineales utilizando el método de eliminación.

a) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$
$x_2 + 2x_3 = 2$
$x_1 + x_4 = -3$

b) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$
$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1$
$-5x_2 + 2x_4 = 0$

c) $2x + 3y - z = 6$
$2x - y + 2z = -8$
$3x - y + z = -7$

d) $x + 2y = 1$
$-3x + 2y = -2$
$-2x + 4y = -1$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales utilizando el método gráfico.

a) $5x_1 + 15x_2 = 30$
$5x_1 - 2x_2 = 13$

b) $2x - 8y = 6$
$-3x + 12y = -9$

c) $4x_1 - 12x_2 = 16$
$-4x_1 + 2x_2 = 6$

d) $6x - 24y = 15$
$-6x + 24y = 16$

3. Resuelva el siguiente problema.

A partir de un estudio de mercados de un grupo de productos de consumo masivo se ha podido determinar que la función de demanda es **$p + 5x = 30$**; así mismo se determino que la función oferta es **$p - 3x = 6$**; en ambas **p** es el precio promedio de los productos y **x** la cantidad promedio demandada del grupo de productos.

Calcular los valores de **p** y **x** para el punto de equilibrio. (Resuelva el problema por el método de eliminación y método gráfico)

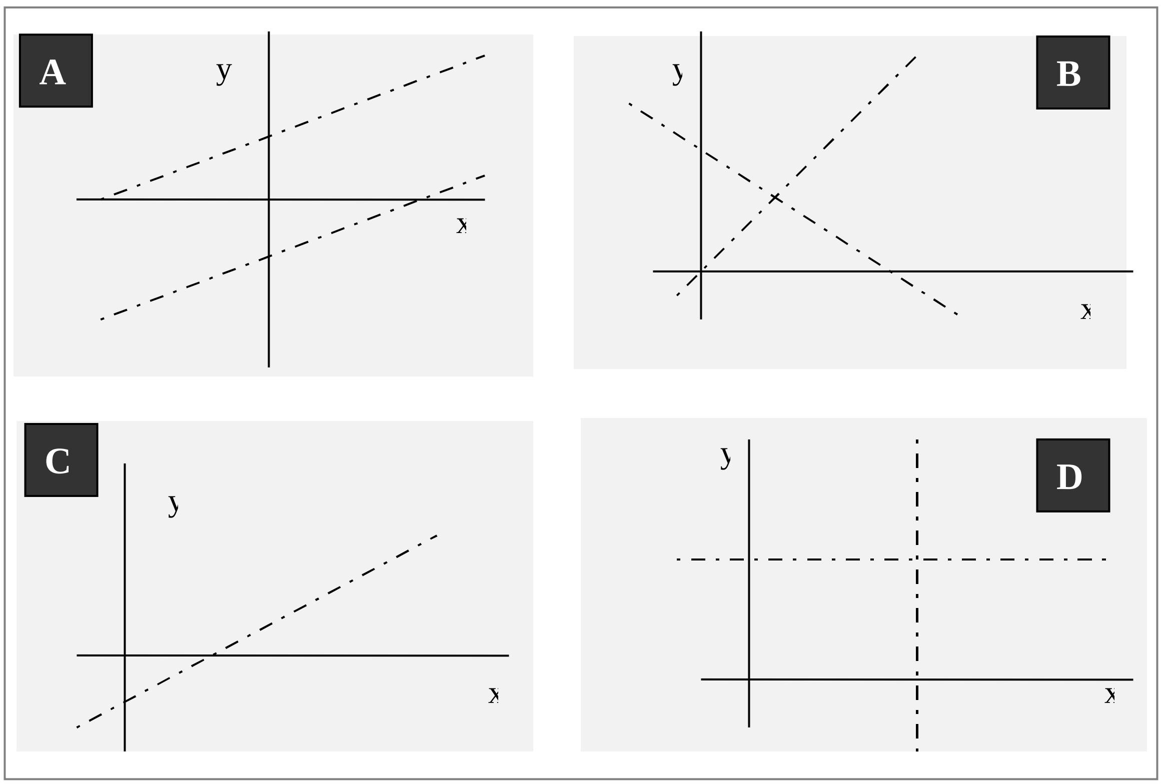
4. De las gráficas A-D escoja la solución que mejor se ajusta a cada uno de los siguientes sistemas lineales.

a) $6x - 24y = 15$
$-6x + 24y = 16$ Seleccione: **A** **B** **C** **D**

b) $x - 2y = 2$
$-2x + 4y = -4$ Seleccione: **A** **B** **C** **D**

c) $x + y = 2$
$x - y = 0$ Seleccione: **A** **B** **C** **D**

d) $x = 3$
$5y = 20$ Seleccione: **A** **B** **C** **D**



5. Resuelva el siguiente problema.

Una persona invierte $250´000.000 en tres tipos de proyectos que rentan el 8%, 10% y 12% de interés efectivo por periodo. Los rendimientos totales al cabo de un periodo fueron de $2´440.000 y los rendimientos por las inversiones al 8% y al 12% fueron iguales. ¿Cuánto invirtió en cada proyecto?

6. Resuelva el siguiente problema.

Una refinería produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 minutos en la planta de refinación. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinación.

Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinación 2, ¿Cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

7. Resuelva el siguiente problema.

Un fabricante de muebles produce sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, 8 para pintarla y 12 para barnizarla y finalmente se necesitan 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. La mesa para realizar las labores de lijado está disponible 16 horas a la semana, por su parte la sala de pintura esta disponible 11 horas a la semana y la mesa de barnizado 18 horas.

¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible?

8. Resuelva el siguiente problema.

Un empresario fabrica tres tipos distintos de productos químicos A, B y C. Cada producto debe pasar por dos maquinas de procesamiento X y Y. Los productos ocupan los siguientes tiempos de las maquinas X y Y

- Una tonelada de A necesita 3 horas de la maquina X y 1 de la maquina Y.
- Una tonelada de B necesita 2 horas de la maquina X y 4 de la maquina Y
- Una tonelada de C necesita 2 horas de la maquina X y 2 de la maquina Y

A la semana la maquina X tiene disponible 100 horas y la maquina Y 160 horas. ¿Qué cantidad de cada producto hay que producir para que las maquinas X y Y operen al 100%?

9. Resuelva el siguiente problema.

Una compañía vende tres tipos de productos A, B, C los cuales se venden en tres ciudades, a saber X, Y, Z. El tiempo en días que requiere la fuerza de ventas de cada ciudad para vender cada producto esta dado en la tabla que se muestra.

Si la disponibilidad de la fuerza de ventas en la ciudad X es de 20 días, en la ciudad Y es de 60 días y en la ciudad X es de 40 días.

¿Cuántas unidades de cada producto se deberían vender para emplear todo el tiempo disponible de los vendedores?

	Ciudad X	**Ciudad Y**	**Ciudad Z**
Producto A	3	2	2
Producto B	7	4	1
Producto C	2	3	4

10. Resuelva el siguiente problema.

Dado el sistema lineal

$2x - y = 5 \quad (1)$
$4x - 2y = t \quad (2)$

a. Determine el valor de t de modo que el sistema tenga una solución.

b. Determine un valor de t de modo que el sistema no tenga solución.

c. ¿Cuántos valores distintos se pueden elegir en el apartado b?

11. Resuelva el siguiente problema.

Un administrador de proyectos dispone de 5000 horas-hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora-hombre de los tres proyectos son de \$16.000, \$20.000 y \$24.000 respectivamente y el costo total es de \$106´000.000. Si el número de horas-hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas-hombre requeridas por los primeros dos proyectos, calcule el número de horas-hombre que puede disponerse en cada proyecto.

12. Resuelva el siguiente problema.

Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado y cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas,

¿Cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?

13. Resuelva el siguiente problema.

Una empresa ensambladora de vehículos fabrica tres tipos de automóvil por año y utiliza tres clases de pintura: rojo, azul y gris. La cantidad de canecas de pintura requerida para pintar cada auto de los tres colores se muestra en la siguiente tabla. Donde las filas representan los colores y las columnas las tres diferentes gamas de vehículos.

2	3	6
5	3	9
4	8	2

Se disponen de 24 canecas de color rojo, 45 canecas de color azul y 42 canecas de color gris. ¿Cuántos carros de cada gama pueden pintarse con todas las canecas de pintura?

14. Resuelva el siguiente problema por el método gráfico

Las ecuaciones de la oferta y demanda del mercado de telas son:

$5p + 6x = 110$ y $2p - 28x = 12$ respectivamente.

Considerando que p es el precio y “x” la cantidad producida, determine estos dos valores en el punto de equilibrio del mercado.

15. Resuelva el siguiente problema por el método gráfico

Una persona ha invertido $20.000 millones, parte al 8.5% y la otra al 6.5% de interés por mes. Sabiendo que los intereses que recibe mensualmente ascienden a $890 millones ¿Cuánto tiene invertido a cada tipo de interés?

Capitulo 2 – Teoría de Matrices

1. Para las siguientes matrices de ser posible determinar las operaciones que se enuncian a continuación. En caso de no ser posible explique los motivos

A = 123240 **B =** 102513

C = 501012 **D =** 302014

- **a)** A.C
- **b)** C.D
- **c)** A+B
- **d)** C-A
- **e)** $D^T + A$
- **f)** $A^T + A$
- **g)** $2(A^T + B) + 4C^T$
- **h)** 2A – C
- **i)** $(3+2)(B + D) + C^T$
- **j)** $(D^T + A) + (3+5)\ C$

2. Considerando las matrices del ejercicio anterior diga cual es el valor de los siguientes elementos:

$\mathbf{a_{13} = b_{13} = c_{11} = d_{32} = a_{22} = b_{22} = c_{22} = d_{22} = a_{32} = b_{32} = c_{42} = d_{23} =}$

3. Compruebe a través de un ejemplo que si existe **A**x**B,** no necesariamente debe existir **B**x**A**

4. Si **B** es la matriz Inversa de **A,** y esta última es del orden 5x5; Hallar **AxB y BxA** ¿De que orden serán estas matrices?

5. Resuelva el siguiente problema.

Un proyecto de investigación nutricional comprende adultos y niños de ambos sexos. La composición de los participantes esta dada por la matriz **A**

AdultosNiños**A =** 80120Hombres
100200Mujeres

ProteínasGrasaCarbohidratos **B =** 202020Adulto102030Niños

El número de gramos diarios de proteína, grasa y carbohidratos que consume cada niño y adulto esta dado por la matriz **B**

a. ¿Cuántos gramos de proteína toman diariamente todos los hombres del proyecto?
b. ¿Cuántos gramos de grasas consumen a diario todas las mujeres?

6. Resuelva el siguiente problema.

Una fábrica de embutidos produce salchichas y morcilla. Ambos productos deben pasar por un proceso de producción y uno de empacado. El paquete de salchichas requieren 2 horas de producción y 1 hora de empacado y el paquete de morcilla 4 horas de producción y 2 de empacado. Si además se tienen dos puntos de fabricación A y B; donde el costo por hora de producción en A es de $300 y el de empacado de $100 y el costo de producción en B es de $350 y el de empacado $120

Teniendo en cuenta lo anterior el gerente quiere conocer la siguiente información

a) Costos de fabricar un paquete de salchichas en la fabrica A.
b) Costos de fabricar un paquete de salchichas en la fabrica B
c) Costos de fabricar un paquete de morcilla en la fabrica A.
d) Costos de fabricar un paquete de morcilla en la fabrica B

7. Determine la matriz inversa de **A** utilizando el método de la Matriz Escalonada Reducida.

A = 202033420 **A^{-1} = ¿?**

8. Sea **A** una matriz de orden 3x2**, B** una matriz de 3x4, **C** una matriz de 4x2 y **D** una matriz de 2x3. Determine cuáles de las siguientes matrices están definidas. Si la matriz esta definida, proporcione su orden.
   a) AB ______________________________ Orden _______________
   b) AC ______________________________ Orden _______________
   c) AD ______________________________ Orden _______________
   d) DA ______________________________ Orden _______________
   e) DB ______________________________ Orden _______________
   f) DC ______________________________ Orden _______________
   g) (AD)B ___________________________ Orden _______________
   h) D(BA)____________________________ Orden _______________

9. *Valoración de Inventarios*. Un comerciante de motos vende cinco marcas diferentes a saber: BMW, Susuki, Yamaha, Honda y TKT. En este momento posee para la venta 8 motos BMW, 7 motos Susuki, 10 Yamaha, 15 Honda y 4 motos TKT.
   Si el valor unitario de las motos es: BMW, $16´000.000; Susuki, $17´000.000; Yamaha, $18´000.000; Honda, $20´000.000; y TKT, $25´000.000. Exprese el valor total de los inventarios como el producto de dos matrices.

10. *Costos de materia primas*. En una fábrica de embutidos se utilizan cuatro diferentes tipos de ingredientes. En la elaboración del salchichón cervecero se utilizan 3 unidades de ingrediente 1, 4 unidades de ingrediente 2, 8 unidades de ingrediente 3 y 10 unidades de ingrediente 4. El costo unitario de los cuatro ingredientes son respectivamente 800, 1000, 2000 y 3000 u.m. Expresar el

costo total de los ingredientes por unidad de producto como la multiplicación de dos matrices.

11. Utilizando Microsoft EXCEL, calcule la matriz inversa y el determinante de las siguientes matrices

a) A = 20-2-3203-363721126-410742-9-40

b) B =
2011-9-21691213-25-4123-451118-210-2510354
226-4112-14-12-432-157-12-555914-26674

c) C =
-12-21-31-42-51-64-73-82-91-15-26-34-43-58-62-70-82-91-19
29374850-62-71-83-91-15-2233-4455-66-7788-991424344554
647483-92112131-41

12. Utilizando el método de los Cofactores calcule el determinante de las siguientes matrices.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & -9 & -21 & 6 & 9 \\ 1 & 13 & -25 & -41 & 23 & -45 \\ 11 & 18 & -21 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 42 & 26 & -41 & 0 & -14 \\ -12 & -4 & 32 & -15 & 7 & -12 \\ -55 & 59 & 14 & 0 & 6 & 74 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 & -2 \\ -11 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

13. Explique si las siguientes matrices son de la forma matriz escalonada reducida:

a) 143000100130000
0

b) 10001000100
0

14. Transforme las siguientes matrices en Matrices Escalonadas Reducidas por Filas (MERF).

a) 423-1201-2-4010-2
01-1

b) -1232342-241
20

c) -2301

15. Compruebe a través de ejemplos las siguientes proposiciones

a. El Det (A) = Det (A^T)

b. Si la matriz B se obtiene de la matriz A al intercambiar dos columnas de A, entonces Det(B) = -Det(A)

c. Si dos filas de A son iguales, entonces Det(A) = 0.

d. Si una fila de la matriz A esta compuesta solo de ceros, entonces el Det (A) = 0.

e. Det (βA) = β Det(A), siendo β un número real.

Capitulo 3 – Solución de Sistemas lineales con Matrices

1. Escriba el sistema lineal correspondiente a las siguientes notaciones matriciales:

a) -4-8-6-25791112340 51015 x_1x_2 x_3x_4 = 5-1 015 -20

b) 02-24-406-68-8 010 x_1x_2 x_3 = 468 10

c) 22113344556677788 x_1x_2 = 246 8

2. Escriba los siguientes sistemas lineales en forma matricial:

a) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$
$x_2 + 2x_3 = 2$

b) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$
$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1$
$-10x_2 + 4x_4 = 0$

c) $2x + 3y - z = 6$
$2x - y + 2z = -8$
$3x - y + z = -7$

d) $3x + 2y - 3z = 8$
$2x + 3y - z = 12$

$7x + 1y + 2z = 1$

3. Encuentre las soluciones de los siguientes sistemas lineales utilizando el método de GAUSS – JORDAN:

a) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$
$x_2 + 2x_3 = 2$

b) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$
$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1$
$-10x_2 + 4x_4 = 0$

4. Un empresario fabrica tres tipos distintos de productos A, B y C. Cada producto debe pasar por dos tipos de procesos ARMADO y ACABADO. La fabricación de los productos ocupa los siguientes tiempos en los anteriores procesos.

- ✓ Un producto A necesita 5 horas del taller de armado y 1 del taller de acabado.
- ✓ Un producto B necesita 2 horas del taller de armado y 4 del taller de acabado.
- ✓ Un producto C necesita 2 horas del taller de armado y 2 del taller de acabado.

A la semana el taller de armado tiene disponible 100 horas y el taller de acabado 160 horas. ¿Qué cantidad de cada producto hay que producir para que ambos talleres trabajen al 100%?

5. Encuentre las soluciones de los siguientes sistemas lineales utilizando el método de la matriz INVERSA (Utilice Microsoft EXCEL):

a) $2x + 3y - z = 6$
$2x - y + 2z = -8$
$3x - y + z = -7$

b) $3x + 2y + z + w + 2v = 2$
$4x + 2y + 2z + 2w = 1$
$x - y + z + 3w + v = 4$
$-x + 2y - z + w + 2v = -2$
$2x + 5z + w + v = -1$

6. Resuelva el siguiente problema

   Una empresa ha obtenido ganancias en el periodo anterior de $1.250´000.000 y quiere invertir ellos en tres proyectos que rentan el 5%, 8% y 10% de interés efectivo por periodo. Los rendimientos totales al cabo de un periodo fueron de $102´440.000 y los rendimientos por las inversiones al 5% y al 10% fueron iguales. ¿Cuánto invirtió la empresa en cada proyecto?

   Resuelva el modelo por el método de la matriz inversa

7. Explique si los siguientes sistemas lineales pueden ser solucionados por el método de la Ley de CRAMER, en caso de no ser posible explique!

   a) $2x_1 + x_2 = 8$
   $4x_1 + 2x_2 = 120$

   b) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$
   $x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8$
   $x_2 + 4x_4 = 6$

   c) $2x_1 - x_2 = 120$
   $4x_1 + 2x_2 = 10$

   b) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$
   $x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8$
   $x_2 + 4x_4 = 6$
   $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -10$

8. Encuentre las soluciones de los siguientes sistemas lineales utilizando el método de la Ley de CRAMER:

   a) $3x + 2y - 3z = 8$
   $2x + 3y - z = 12$
   $7x + 1y + 2z = 1$

   b) $x + 10y - 3z + w = 8$
   $x - 2y - z - 3w = 2$
   $7x - 1y - 2z = 1$
   $5x + 2y + 3z + 4w = 0$

9. Resuelva el siguiente problema

   Un nutricionista está preparando una dieta que consta de los alimentos A, B Y C. Cada onza del alimento A contiene 4 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Cada onza del alimento B contiene 5 unidades de proteína, 1 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada onza del alimento C contiene 2 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 40 unidades de proteína, 10 unidades de grasa y 10 unidades de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada alimento se necesitan para preparar la comida deseada?

Resuelva el modelo por el método de la matriz inversa y la Ley de CRAMER

10. Resuelva el siguiente problema

Una carpintería repara sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 20 minutos para lijar una silla, 12 para pintarla y 24 para barnizarla, de otro lado requiere 24 minutos para lijar una mesa para café, 16 para pintarla y 24 para barnizarla y finalmente se necesitan 30 minutos para lijar una mesa para comedor, 24 para pintarla y 36 para barnizarla.

El taller para realizar las labores de lijado está disponible 32 horas a la semana, por su parte el taller de pintura esta disponible 22 horas a la semana y el taller de barnizado 36 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen al 100%? Utilice cualquier método de los estudiados para resolver el modelo

11. Determine cual de los siguientes sistemas lineales son equivalentes: ¡Sin resolverlos!

a) $x + 2y - z = 4$
$3x + 4y - 2z = 7$

b) $x + 2y - z = 50$
$3x + 4y - 2z = 70$

c) $6x + 8y - 4z = 14$
$x + 2y - z = 4$

12. Resuelva el siguiente problema

Una persona invierte $120´000.000 en bonos, acciones y préstamos personales a una tasa efectiva anual del 20%, 22% y 30% respectivamente. El rendimiento anual fue de $22´500.000 y el rendimiento de préstamos personales fue 2 veces el rendimiento de la inversión en bonos. ¿Cuál fue la inversión para cada tipo de interés?

13. Resuelva el siguiente problema

Una compañía comercializa tres tipos de perfumes A, B, C los cuales se venden en tres almacenes, a saber: almacén X, almacén Y y almacén Z. El tiempo en días que requiere cada almacén para vender cada producto esta dado en la tabla que se muestra. Si el almacén X esta abierto 22 días, el almacén Y 30 días y el almacén X 20 días por mes. ¿Cuántas unidades de cada producto se deberían vender para que la productividad de cada almacén sea la máxima?

	Almacén X	Almacén Y	Almacén Z
Perfume A	6	4	4
Perfume B	14	8	2
Perfume C	4	6	8

<u>Utilice cualquier método de los estudiados para resolver el modelo</u>

14. Resuelva los siguientes sistemas lineales utilizando Microsoft EXCEL

a) $-5x + 10y - 6z = 2$
$4x + 13y - 2z = 10$
$10x + 22y + 2z = -3$

b) $7a + 10b - 3c + d = 12$
$a - 2b - c - 3d = -22$
$6a - 4b - 2c = -1$
$2a + 2b + 3c + 4d = -3$

c) $2x_1 - 7x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 - 3x_{10} = 21$
$7x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 8x_6 + 10x_7 + x_{10} = -12$
$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_6 + 2x_8 + x_9 - x_{10} = -2$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_5 + x_6 + 5x_7 + 2x_8 + 12x_9 - 2x_{10} = 0$
$7x_4 + 2x_5 + 5x_8 + x_9 + 8x_{10} = -3$
$2x_3 + 5x_6 + 8x_7 + 4x_8 - 2x_9 = 23$
$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_8 + 2x_9 + 7x_{10} = -2$
$-12x_1 - 4x_3 + 7x_5 + 4x_7 + 3x_9 = -5$
$3x_1 - 5x_3 - 7x_5 + x_7 + 3x_9 = 33$
$8x_2 - 6x_4 + 4x_6 + 2x_8 + x_{10} = 22$

15. Resuelva los siguientes sistemas lineales utilizando Microsoft EXCEL

a) $2x_1 - 7x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = -21$
$3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 8x_6 + 10x_7 + x_9 = -7$

$3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 4x_6 + 2x_8 + x_9 = 6$
$-x_4 - 2x_5 + 2x_8 + 9x_9 = -3$
$2x_3 - 8x_6 + 2x_7 + 3x_8 - 2x_9 = 22$
$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_8 - 8x_9 = -2$
$-12x_1 + 3x_3 + 5x_5 + 7x_7 - 2x_9 = -55$
$2x_1 + 8x_3 - 7x_5 + x_7 + 3x_9 = 33$
$7x_2 + 3x_4 + 2x_6 = 0$

b) $2a - 7b - 4c - d = -111$
$2a - 3b - 7c - 3d = -6$
$9a - 2b - 3c + 7e = -7$
$2a - d - 4e = -31$
$-a - 2b - 3c - 4d - e = 25$

UNIDAD 2. Programación Lineal

1. Escriba la forma general matemática del modelo canónico de Programación lineal

2. Describa brevemente los pasos que deben seguirse para solucionar un problema a través de un modelo de Programación Lineal.

3. Explique porque los siguientes modelos de Programación Lineal no son canónicos.

a) Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2$ Sujeto a: $3x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	b) Maximizar $Z = -5x_1 - 8x_2$ Sujeto a: $-7x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
c) Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ Sujeto a: $3x_1 + x_2 + 9x_3 \le 16$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 22$ $x_3 \ge 10$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	d) Minimizar $Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4$ Sujeto a: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15$ $x_1 \le -4$ $x_3 + 2x_4 \le -16$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

4. Convierta los modelos de Programación Lineal del punto 3 en modelos Canónicos.

5. Formule el problema DUAL de los siguientes modelos de Programación Lineal.

a) Maximizar $Z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ Sujeto a: $2x_1 - 5x_2 + 3x_4 \leq 7$ $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq -21$ $9x_1 + 7x_4 \leq 3$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	b) Minimizar $Z' = -2x_1 - 5x_2$ Sujeto a: $-3x_1 - 4x_2 \geq -4$ $x_1 + x_2 \geq -11$ $7x_1 + 2x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
c) Minimizar $Z' = 11x_1 + 33x_2 + 55x_3$ Sujeto a: $77x_1 + 11x_2 + 22x_3 \geq 33$ $4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1$ $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 19$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	d) Maximizar $Z = 5x_1 + 9x_2 + 7x_3$ Sujeto a: $2x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 15$ $11x_1 + 13x_2 \leq 12$ $6x_3 + 3x_2 \leq 21$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

6. Solucione el siguiente problema.

La AUTO-MORA Cia., vende automóviles y utilitarios 4x4. La compañía obtiene \$300 mil (unidades monetarias) de utilidad por cada automóvil que vende y \$400 mil por cada utilitario. El proveedor no puede suministrar más de 300 automóviles, ni más de 200 utilitarios por mes. El tiempo de preparación para los distribuidores es de 2 horas para cada automóvil y 3 horas para cada utilitario. La compañía cuenta con 900 horas de tiempo de taller disponible cada mes para la preparación de los vehículos.

Plantee un modelo de Programación Lineal para determinar cuántos automóviles y utilitarios deben ordenarse al proveedor para maximizar las utilidades.

7. Solucione el siguiente problema.

María Molina, la dietista jefe del Hospital General de Antioquia es responsable de la planeación y administración de los requerimientos alimenticios de los pacientes. La señora Molina examina en estos momentos el caso de un grupo de pacientes a los cuales, por prescripción medica, se les ha restringido su alimentación a dos alimentos particulares. A los pacientes no se les restringe la cantidad que deben consumir de los alimentos, no obstante éstos deben satisfacer los siguientes requerimientos nutritivos mínimos por día: 1000 unidades del nutriente A, 2000 del nutriente B y 1500 unidades del nutriente C. Cada onza del alimento No 1, contiene 100 unidades de nutriente A, 400 unidades de nutriente B y 200 unidades de nutriente C; cada onza de alimento No. 2 contiene 200 unidades de nutriente A, 250 unidades del nutriente B y 200 unidades del nutriente C. El costo unitario para los alimentos No 1 y No 2 es de $600 y $800 por libra respectivamente.

Ayude a la señora Molina a plantear un modelo que le permita determinar la combinación de fuentes alimenticias que arroje el menor costo y que satisfaga todos los requerimientos nutritivos.

8. Solucione el siguiente problema.

La ELECTRO-MOR ha construido una planta que puede operar 48 horas semanales con gastos fijos de $10 millones por semana. En ella ha decidido producir radios AM/FM y reproductores de DVD. La producción de radios requiere 2 horas de mano de obra cada uno y los reproductores de DVD requieren 3 horas de mano de obra cada uno. Cada radio contribuye con $20 mil a las utilidades y cada reproductor de DVD con $25 mil. El departamento de mercadeo de ELECTRO-MOR tiene información histórica que le permite afirmar que lo máximo que puede venderse por semana son 150 radios y 100 reproductores de DVD.

Plante un modelo de Programación Lineal a través del cual pueda determinar la mezcla óptima de producción que maximice las utilidades.

9. Considere el siguiente modelo de Programación Lineal.

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Resuelva este programa utilizando el procedimiento de solución gráfica.

b) Calcule cual es el rango de optimalidad para c_1

c) Calcule cual es el rango de optimalidad para c_2

d) Suponga que c_1 se incrementa de 2 a 2.5. ¿Cuál es la nueva solución óptima?

e) Suponga que c_2 se reduce de 3 a 1. ¿Cuál es la nueva solución óptima?

10. Solucione el siguiente problema.

SIMESA una siderúrgica produce dos clases de acero: regular y especial. Una tonelada de acero regular necesita 2 horas en el horno abierto y 5 horas en el foso de calentamiento; una tonelada de acero especial necesita 2 horas en el horno abierto y 3 horas el foso de recalentamiento. El horno abierto está disponible 8 horas al día y el foso de calentamiento 15 horas. La ganancia en una tonelada acero regular es de $120 y de $100 en una tonelada de acero especial.

Determine cuántas toneladas de cada clase de acero deben fabricarse para maximizar la ganancia. (Resuelva el modelo por el método gráfico)

11. Solucione el siguiente problema.

Un fideicomiso planea invertir hasta $6000 millones en series de bonos: A y B. El bono A es más seguro que el B y tiene dividendos de 8 por ciento, mientras los del bono B son del 10 por ciento. Suponga que el reglamento del fideicomiso establece que no deben invertirse más de $4000 millones en el bono B y que al menos deben invertirse $1500 millones en bonos A.

¿Cuánto dinero debe invertirse en cada tipo de Bono para maximizar el rendimiento? (*Resuelva el modelo por método grafico*)

Si el fideicomiso tiene la ‘siguiente regla adicional: “La cantidad invertida en el B no puede ser mayor que la mitad de la cantidad invertida en el bono A”.

¿Cuánto dinero debe invertirse en cada tipo de bono para maximizar el rendimiento? (*Resuelva el modelo por método Símplex*)

12. Escriba la tabla Símplex inicial para cada uno de los siguientes modelos de Programación Lineal

a) Maximizar $Z = x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4$ Sujeto a: $x_1 + 8x_2 + x_4 \leq -2$ $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ $2x_1 + x_4 \leq 11$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	b) Maximizar $Z = x_1 - 10x_2$ Sujeto a: $12x_1 + 10x_2 \leq 5$ $10x_1 + 20x_2 \leq 0$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$
c) Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3$ Sujeto a: $x_1 + 7x_3 \leq 10$ $9x_2 + 2x_3 \leq 12$ $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	d) Maximizar $Z = 5x_1 + 9x_2 + 7x_3$ Sujeto a: $2x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 15$ $11x_1 + 13x_2 \leq 12$ $6x_3 + 3x_4 \leq 21$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

13. Solucione el siguiente problema.

La ABC Cia., fabrica tres productos de última moda, a los cuales el departamento de mercadotecnia ha denominado X, Y, Z. Estos tres productos se fabrican a partir de tres ingredientes A_1, A_2 y A_3. Las libras de cada ingrediente que se requieren para fabricar una libra de producto final se muestran en la siguiente tabla.

Producto	Ingredientes		
	A_1	A_2	A_3
X	4	7	8
Y	3	9	7
Z	2	2	12

La empresa cuenta respectivamente con 400, 800 Y 1000 libras de los ingredientes A_1, A_2 y A_3 respectivamente. Bajo las condiciones actuales del mercado, las contribuciones a las utilidades de cada productos son $18 mil para X, $10 mil para Y y $12 mil para Z.

Plantee y resuelva el modelo de Programación Lineal que permita determinar la cantidad de cada uno de los productos que debe fabricarse para maximizar las ganancias.

14. Solucione el siguiente problema.

ASEO Ltda., una compañía de recolección de basura transporta en su flotilla de camiones desechos industriales en contenedores sellados. Supongamos que cada contenedor de Industrias RICAS S.A., pesa 6 kilos y tiene un volumen de 3 metros cúbicos, mientras que cada contenedor de la Corporación el TESORO S.A. pesa 12 kilos y tiene un volumen de 1 metro cúbico. Si ASEO Ltda., cobra a RICAS S.A. 30 centavos por cada contenedor transportado en un viaje, y 60 centavos por cada contenedor del TESORO S.A y si un camión no puede transportar más de 18,000 kilos o más de 1800 metros cúbicos de de volumen,

¿Cuántos contenedores de cada cliente debe transportar en un camión, en cada viaje, para maximizar los ingresos por carga? (Resuelva el modelo por método Símplex)

15. Solucione el siguiente problema.

Un productor de alimento de animales fabrica dos clases de grano: A y B. Cada unidad de grano A contiene 2 gramos de grasa, un gamo de proteína y 80 calorías. Cada unidad de grano B contiene 3 gramos de grasa, 3 gramos de proteína y 60 calorías. Suponga que cada unidad de producto final debe tener al menos 18 gramos de grasa, al menos 12 gramos de proteína y al menos 480 calorías. Si cada unidad de A cuesta 10 pesos y cada unidad de B cuesta 12 pesos.

¿Cuántas unidades de cada clase de grano debe usar para minimizar el costo? (Sugerencia: Resuelva el modelo DUAL)

16. Solucione el siguiente problema.

La Compañía de petróleos de Colombia comercializa gasolina de dos tipos: la *extra* y la *normal.* Cada gasolina debe satisfacer ciertas especificaciones, tales como la presión máxima de vapor aceptable y el octanaje mínimo. Los requerimientos de manufactura para las gasolinas y el precio por galón se muestran en la siguiente tabla.

Tabla. Especificaciones de manufactura y precios por galón Compañía de Petróleos de Colombia.

Gasolina	Octanaje Mínimo	Presión máxima de vapor	Precio de Venta (Por galón)
Normal	82	8	$5.800
Extra	92	5	$7.400

Se utilizan tres tipos de refinados para fabricar las gasolinas normal y extra. Las características de estas gasolinas base se muestran en la tabla.

Gasolina Base	Octanaje	Presión de vapor	Disponibilidad Máxima (galones)	Costo por Galón
Tipo 1	108	4	32.000	$5.500
Tipo 2	92	12	20.000	$4.500
Tipo 3	73	4	38.000	$4.100

La Compañía se ha comprometido con un comprador a proporcionarle 30,000 barriles de gasolina normal por semana. No se tienen compromisos con respecto a la gasolina extra.

a) La compañía desea determinar un modelo que le permita determinar el plan de producción de manera que se maximicen las utilidades de la compañía.

b) Cuanto debe producir de cada tipo de gasolina para maximizar las utilidades.

17. Solucione el siguiente problema.

La compañía INVERSIONES CM&MC enfrenta el problema de determinar qué proyectos de "crecimiento" debe emprender en los próximos 4 años. La compañía tiene recursos financieros limitados; por tanto, no puede financiar todos los proyectos. A cada proyecto se le ha determinado el Valor Presente y el requerimiento de capital asociado. Cada proyecto tiene diferentes requerimientos de capital para los próximos 4 años. En la tabla se muestran el valor presente estimado, los requerimientos de capital y el capital disponible proyectado para cada proyecto.

Tabla**.** Valor actual, requerimientos de capital y capital disponible para la compañía INVERSIONES CM&MC

Tipo de proyecto	***Valor Presente Estimado***	***Requerimientos de Capital(*)***			
		Año 1	***Año 2***	***Año 3***	***Año 4***
Expansión de la planta	180.000	30.000	40.000	40.000	30.000
Adquisición de nueva maquinaria	20.000	12.000	8.000	0	0
Desarrollo de nuevos productos	72.000	30.000	20.000	20.000	20.000
Ampliación de los puntos de venta	80.000	20.000	30.000	40.000	10.000
Fondos Disponibles de Capital		***65.000***	***80.000***	***80.000***	***50.000***

(*) Valores en u.m

A los administradores de la compañía INVERSIONES CM&MC les gustaría desarrollar un plan de asignación de capital que muestre las erogaciones que debe hacer para cada uno de los 4 años y qué proyectos se deben financiar bajo el plan general.

18. Solucione el siguiente problema.

En el año 2005 la compañía C&M obtuvo ganancias (no repartidas) por $100.000 millones y ahora busca oportunidades de inversión para estos fondos. El asesor financiero de la empresa recomienda inversiones en la industria alimenticia, la industria metalmecánica y en Bonos del estado Colombiano. Específicamente, el analista ha identificado cuatro oportunidades de inversión y ha proyectado sus tasas de rendimiento anual. Las inversiones y las tasas de rendimiento aparecen en la siguiente tabla.

Tabla. Oportunidades de inversión para la compañía C&M.

Empresa para invertir	***Tasa de rendimiento proyectado (%)***
Compañía NABUSCO	7.3
Industrias SIEL	10.3
Acerías Guerra del Río	6.4
Industrias FURETENA	7.5
Bonos del Estado	4.5

La compañía ha impuesto las siguientes guías de inversión:

- En ninguna de las industrias se debe invertir más de $50.000 millones
- Las inversiones en bonos del gobierno deben ser por lo menos 25% de las inversiones de la industria metalmecánica.
- La inversión en la Industria SIEL, con elevado rendimiento y alto riesgo, no puede ser mayor de 60% de la inversión total en la industria alimenticia.

a) Plante un modelo de Programación Lineal que le permita al gerente general de C&M decidir los montos que debe invertir en cada empresa, con el objeto de maximizar los rendimientos financieros.

b) Específicamente que cantidades debe invertir en cada empresa?
(Sugerencia: para la solución utilice Solver de Microsoft EXCEL)

19. Solucione el siguiente problema.

Una planta eléctrica utiliza dos clases de combustible: con bajo contenido de azufre, (X) y con alto contenido de azufre (Y) para producir electricidad. Por cada hora que la planta este encendida, cada galón de X emite 3 unidades de bióxido de azufre, genera 4 kilovatios y cuesta $60, mientras que cada galón de Y emite 5 unidades de bióxido de azufre, genera 4 kilovatios y cuesta $50. Las regulaciones ambientales del municipio para el cual genera energía estipulan que la máxima cantidad de bióxido de azufre que puede emitirse por hora es de 15 unidades.

Si al menos deben generarse 16 kilovatios por hora para atender las necesidades de la población. ¿Cuántos galones de X y cuántos de Y deben utilizarse por hora para minimizar el costo del combustible utilizado?
(Sugerencia: para la solución utilice Solver de Microsoft EXCEL)

20. Solucione el siguiente problema.

La compañía de aviación C&M Airlines después de realizar un estudio del mercado encuentra una oportunidad de expansión en una ruta entre las ciudades de Cuesta Abajo y Cuesta Arriba. Para atender esta nueva ruta C&M Airlines está estudiando dos tipos de aviones: el tipo TW-40-2 que transporta 40 pasajeros y necesita 2 mecánicos de servicio y el tipo PW-60-3 que transporta 60 pasajeros y necesita 3 mecánicos de servicio. Suponga que la compañía debe transportar al menos 300 personas diariamente y que las reglas de seguridad para el tamaño del hangar no permiten más de 12 mecánicos en la nómina.

Si cada avión del tipo TW-40-2 cuesta USD 10´000.000 y cada avión del tipo PW-60-3, cuesta USD 15´000.000 ¿Cuántos aviones de cada tipo debe adquirir la compañía para minimizar la inversión?

(Sugerencia: para la solución utilice Solver de Microsoft EXCEL)

UNIDAD 3. Teoría de líneas de Espera

1. Explique las razones que hacen que las siguientes proposiciones sean verdaderas o falsas

a) Los modelos de líneas de espera son descriptivos y al mismo tiempo determinísticos.

Verdadero ☐ Falso ☐

b) Las características de operación para los modelos de líneas de espera son valores promedio a largo plazo, y no valores que pueden ocurrir en realidad.

Verdadero ☐ Falso ☐

c) En un sistema de líneas de espera de etapas múltiples, en el que la primera etapa es M/M/l, el patrón de llegadas a la segunda etapa sería determinístico.

Verdadero ☐ Falso ☐

d) Un sistema de líneas de espera con filas paralelas, en el que los clientes pueden cambiarse de línea (denominado “maniobrar”) puede de cualquier manera plantearse como un sistema múltiple M/M/1.

Verdadero ☐ Falso ☐

e) En el caso de una Fila donde no se respeta el orden de llegada para atender a los clientes, sino que algunos de ellos se les da prioridad, se puede modelar como una Línea de Espera M/M/S.

Verdadero ☐ Falso ☐

f) Para calcular el tiempo promedio de servicio, sólo es necesario contar el número de ocurrencias por hora y tomar el recíproco de este número.

Verdadero ☐ Falso ☐

g) El número promedio de unidades que se encuentran en el sistema debe ser siempre mayor que el número promedio de unidades que esperan en la fila.

Verdadero ☐ Falso ☐

h) Es posible eliminar la "holgura" de un sistema de líneas de espera aumentando la tasa de servicio sin afectar en forma adversa el tiempo de espera de los clientes.

Verdadero ☐ Falso ☐

i) En un modelo M/M/S, no se considera que el sistema esté "ocupado" a menos que todos los canales de servicio estén llenos.

Verdadero ☐ Falso ☐

2. Utilizando la notación de Kendall, describa cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera

a) Estudiantes que llegan al azar para utilizar una máquina copiadora y cada estudiante hace una sola copia.

b) Botellas que salen de una línea de ensamble a una tasa constante para inspección. tiempo de inspección es de duración aleatoria y hay 4 inspectores.

c) Estudiantes que llegan al azar a la oficina de registro de la FUNLAM para el segundo semestre. El tiempo de registro es de duración aleatoria y existe un asesor disponible para el registro.

- **d)** Clientes que llegan aleatoria mente un banco a una sola fila, donde son atendidos por tres cajeros. La tasa de atención es general.
- **e)** Clientes que llegan de manera aleatoria a pagar las compras en un supermercado que dispone de 5 cajeros. Para cada cajero se forma una fila y la atención es aleatoria.

3. Comente sí cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera se ajusta a las condiciones del modelo M/M/l o M/M/S,

- **a)** Un restaurante de comida rápida con múltiples puntos de atención. Los puntos se abren de acuerdo a la necesidad.
- **b)** Un restaurante de comida rápida con una sola fila de servicio, por la cual deben pasar todos los clientes para hacer y recibir sus pedidos (de diferente volumen y complejidad).
- **c)** En un banco, la ventanilla para automovilistas.
- **d)** Una instalación para lavado de automóviles con una sola fila que conduce a instalaciones múltiples de lavado.
- **e)** Una tienda de abarrotes grande que tiene múltiples cajas de salida.

4. Conteste las preguntas, planteadas al final, realizando una caracterización del siguiente sistema.

Una caja rápida del EXITASO atiende sólo clientes con 12 artículos o menos, y como resultado, es mucho más rápida la atención para estos clientes que en las filas normales. El gerente, Pedro Tangarife, ha estudiado esta fila y ha podido determinar que los clientes llegan a una tasa aleatoria de 30 por hora y que en promedio el tiempo de servicio para un cliente es de un minuto. Suponiendo que la tasa de servicio también es aleatoria, responda las siguientes preguntas:

- **a)** ¿Cuáles son μ y λ para la caja rápida?
- **b)** En promedio ¿cuántos clientes están siendo atendidos?
- **c)** En promedio ¿cuántos clientes esperan en la fila?
- **d)** En promedio, ¿cuánto debe esperar un cliente antes de poder retirarse de la caja?

e) En promedio ¿cuánto debe esperar en la fila un cliente?

f) Si las políticas de atención al cliente del supermercado son que un cliente no espere más de 2 minutos en este tipo de cajas. ¿Qué puede decir usted de esta caja?

5. Resuelva el siguiente problema.

A un cajero Automático de un banco, llegan clientes al azar a una tasa de 5 por hora, a su vez este maneja solicitudes de servicio en forma aleatoria a una tasa promedio de 10 clientes hora. Considerando esta situación responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de tres clientes a solicitar servicio durante un periodo de una hora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente solicite servicio durante un periodo de una hora?

c) ¿Cuál es la probabilidad de dos clientes exactamente en una hora? ¿Tres clientes?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio de servicio a los clientes?

e) ¿Cuál es la probabilidad que un cliente espera más de 10 minutos para ser atendido?

f) ¿A que porcentaje de clientes se les atenderá en menos de 3 minutos?

6. Resuelva el siguiente problema.

Para el cajero automático del ejercicio 5 suponga que los clientes llegan al azar y el tiempo necesario para dar servicio a un cliente es también aleatorio. Además suponga que la tasa de llegadas es de 5 por hora y la tasa de servicio es de 10 por hora. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un cliente se le atienda de inmediato, a su llegada al cajero automático?

b) ¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente invierte en el cajero automático -tanto en espera del servicio como recibiéndolo-?

c) Trace la gráfica de P, con respecto a n, en donde n = número de clientes en el sistema. Marque en la gráfica el valor esperado de n.

d) En promedio, ¿cuántos clientes se encuentran esperando en la línea para que el cajero automático los atienda?

7. Resuelva el siguiente problema.

A la biblioteca de la Universidad Luis Amigó llegan estudiantes al azar. En el mostrador de entrada los estudiantes deben entregar bolsas, portafolios, etc. El tiempo que se requiere para hacer la entrega es de duración aleatoria debido al diferente número de libros y bolsas que los estudiantes llevan. Se ha determinado que la tasa promedio de llegadas es 20 estudiantes por hora y que el tiempo promedio para recibir, clasificar y entregar el ficho de ubicación de las pertenencias es de un (1) minuto.

a) ¿Qué valores tienen μ y λ para este problema?

b) ¿Cuál es el factor de utilización del puesto de recepción de la biblioteca?

c) ¿Qué tiempo le llevará a un estudiante en promedio pasar por la recepción?

d) ¿En promedio, cuántos estudiantes se encuentran esperando en la fila en cualquier momento?

e) ¿Durante qué fracción de tiempo estará libre el empleado que revisa las bolsas para poder dedicarse a estudiar?

8. Resuelva el siguiente problema.

La fotocopiadora “NUEVA” tiene tres taquillas, cada una de las cuales atiende una fila de clientes. Las personas llegan al la fotocopiadora a una tasa total de 90 por hora y cada taquilla puede atender 40 personas por hora. Tanto las llegadas como los servicios son por completo aleatorios. Con base en esta información responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de situación de líneas de espera es ésta? (Sea preciso).

b) Cuál es la probabilidad de que, si consideramos una sola de las taquillas, se encuentre desocupada?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que esté atendiendo a tres personas o hayan tres personas esperando en la fila?

d) ¿Cuál es el número promedio de personas en el sistema de líneas de espera de cada una de las taquillas (esperando y siendo atendidos)?

e) ¿Cuál es el tiempo promedio que una persona espera antes de llegar a la taquilla?

f) Si el Fotocopiadora decide utilizar una sola fila para la atención en las tres taquillas, ¿qué característica de operación esperaría usted que cambiara más? ¿Por qué?

9. Resuelva el siguiente problema.

La Compañía "Pescado Fresco" utiliza sus propios botes camaroneros para pescar camarón y después lo empaca para enviarlo a otras partes. Cuando estos botes llegan durante la temporada, hay que descargados tan rápido como posible para que puedan volver al mar.

El gerente de producción de "Pescado Fresco" estima que el costo de que un bote camaronero permanezca detenido es $50 por hora (esto incluye los salarios al igual que el tiempo perdido de pesca). Los trabajadores que descargan los botes ganan $8 por hora ya sea que estén trabajando o no.

Si el patrón de llegadas para los botes camaroneros es aleatorio y el tiempo de descarga también lo es, ¿Cuál es el número de trabajadores que "Pescado Fresco" debe utilizar para descargar los botes de manera tal que el costo de desembarque se minimice? Los botes camaroneros llegan a una tasa promedio de uno por hora y cada trabajador puede descargar medio bote por hora.

10. Resuelva el siguiente problema.

El centro de reparación de computadoras MANCOMP, maneja la reparación de las computadoras personales que vende el EXITASO. Un problema común de reparación es la alineación de unidades de disco. Al llegar las computadoras al centro de reparación se asigna en forma rotatoria a uno de los tres técnicos para que hagan la alineación. Por razones de control de calidad, una vez que se asigna una computadora a un técnico, no se asigna a otro. Suponiendo que las tasas de llegada y de servicio son aleatorias y que en promedio se ocurren 30 casos de reparación por mes y que cada técnico es capaz de atender 2 por día (20 días hábiles por mes), responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será el tiempo promedio que una computadora permanece en el centro de servicio?
b) En promedio, ¿en cualquier momento, cuántas computadoras estarán esperando para que les dé servicio?
c) ¿Cómo respondería usted las preguntas anteriores si una computadora que llega pasara al primer técnico disponible para que le diera servicio, en vez de que se asignara en forma rotatoria?

11. Resuelva el siguiente problema.

La compañía arrendadora de automóviles CAR-RENT opera su propia instalación de lavado y limpieza de automóviles para alistarlos para su alquiler. Los automóviles llegan a la instalación de limpieza en forma aleatoria a una tasa de 5 por día. La compañía arrendadora ha determinado que los automóviles pueden limpiarse a un ritmo de 2**n** por día, en donde **n** es el número de personas que trabajan en un automóvil. Por ejemplo, si se encuentran 4 personas trabajando la tasa de lavado es de 8 automóviles por día. Se ha determinado que este procedimiento de lavado se ajusta a la distribución exponencial negativa. La compañía les paga a sus trabajadores $30 por día y se ha determinado que el costo por un automóvil que no esté disponible para rentarlo es de $25 por día.

a) Calcule el número de empleados que deben contratarse en la instalación de lavado para minimizar los costos de operación.

b) Calcule las características de operación L, Lq, W y Wq para el número de empleados que eligió.

12. Resuelva el siguiente problema.

La compañía Monta & Llantas ha decidido contratar un nuevo mecánico para manejar todos los cambios de llantas de clientes que ordenan juegos nuevos de llantas. Dos mecánicos han solicitado trabajo. Uno de ellos tiene poca experiencia y por consiguiente puede contratarse por $14 mil la hora y darle servicio a un promedio de 3 clientes en ese lapso. El otro tiene varios años de experiencia puede dar servicio a un promedio de 4 clientes por hora pero se le tendría que pagar $20 mil por hora. Suponga que los clientes llegan al taller de Monta & Llantas a la tasa de 2 clientes por hora y calcule:

a) Calcule las características de la línea de espera de cada mecánico, suponiendo llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

b) Si la empresa asigna un costo de espera por cliente de $30 mil por hora. ¿Cuál de los dos mecánicos se debería contratar para minimizar los costos de operación?

13. Resuelva el siguiente problema.

Arte Decoración proporciona a sus clientes asistencia de decoración doméstica y de oficinas. En operación normal, llegan un promedio de 2.5 clientes cada hora. Un asesor de diseño está disponible para responder las preguntas de los clientes y dar recomendaciones del producto. El asesor toma en promedio 10 minutos para atender cada cliente.

a) Calcule las características de operación de la línea de espera de los clientes, suponiendo llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

b) Las metas de servicio indican que un cliente que llega no debe esperar en promedio más de cinco minutos para que lo atiendan. ¿Se está cumpliendo esta meta? De lo contrario. ¿Qué acción recomendaría usted?

c) Si el asesor puede reducir el tiempo promedio que utiliza por cliente hasta a 8 minutos. ¿Cuál es la tasa media de servicio? ¿Se cumplirá la meta de servicio?

14. Resuelva el siguiente problema.

"Súper-Merca" es un pequeño supermercado local con sólo una caja de salida. Suponga que los que los compradores llegan a la caja de pago de acuerdo con una distribución de probabilidad Poisson, con una tasa promedio de llegadas de 15 clientes por hora. A su vez, los tiempos de servicio de caja siguen una distribución de probabilidad exponencial, con una tasa media de servicio de 30 clientes por hora.

a) Calcule las características de operación de esta línea de espera.

b) Si la meta de servicio del administrador es limitar el tiempo de espera antes de iniciarse el proceso de cobrar a no más de 5 minutos. ¿Qué recomendaciones haría usted en relación con el sistema de caja actual?

Después de estudiar el análisis de la línea de espera del "Súper-Merca" el gerente desea considerar alguna de las siguientes alternativas para mejorar el servicio. ¿Qué alternativa recomendaría usted? Justifique su recomendación.

a) Contratar una segunda persona para empacar las compras en tanto que el cajero está capturando datos de costos y cobrando al cliente. Con esta operación mejorada en un solo canal la tasa media de servicio puede incrementarse a 30 clientes por hora.

b) Contratar una segunda persona para operar una segunda caja de salida. La operación en dos canales tendría una tasa de servicio media de 20 clientes por hora para cada uno de los canales.

15. Resuelva el siguiente problema.

El Banco de Medellín tiene actualmente tiene una ventanilla de cajero automotriz. Las llegadas siguen una distribución de probabilidad Poisson con una tasa media de llegada de 10 automóviles por hora. Los tiempos de servicio siguen una distribución de probabilidad exponencial con una tasa media de servicio de 12 automóviles por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún auto para ser atendido?

b) Si usted llegara en automóvil a la instalación. ¿Cuántos automóviles esperaría usted ver esperando y siendo atendido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos un automóvil esté esperando atención?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio en la línea de espera aguardando servicio?

e) Como cliente potencial del sistema, ¿quedaría usted satisfecho con el servicio que le ofrece el banco a través de la ventanilla para autos? ¿Por qué sí o por qué no?

f) Para mejorar el servicio a los clientes los administradores del Banco desean investigar el efecto que produce en el servicio una nueva ventanilla de cajero automotriz. Suponga para cada una de las ventanillas una tasa media de llegadas de 10 automóviles por hora y una tasa media de servicio de 12 automóviles por hora. ¿Qué efecto tendría la adición de esta nueva ventanilla en el sistema? ¿Sería aceptable este sistema?

16. Resuelva el siguiente problema.

La fábrica de la compañía Tejidos el Águila cuenta en la actualidad con dos depósitos de herramientas en la planta, cada una con un empleado. Un depósito de herramientas maneja las herramientas para la maquinaria pesada y el segundo maneja el resto. Los usuarios de estos depósitos son los mecánicos de mantenimiento los cuales llegan a retirar las herramientas en forma aleatoria a una tasa promedio de 35 por hora y el tiempo esperado de servicio es 2,5 minutos.

Debido a que los mecánicos se quejan por tener que esperar demasiado para ser atendidos la gerencia ha propuesto que se combinen los dos depósitos a fin de que cada encargado pueda manejar cualquier herramienta cuando aumente la demanda. Se cree que la tasa media de llegada a1 depósito de herramientas con dos empleados combinados se aumentará a 65 por hora y que el tiempo esperado de servicio seguiría en 2,5 minutos.

En caso de que los tiempos de atención tengan una distribución exponencial negativa y que los requerimientos de atención una distribución de Poisson explique si la decisión del gerente es acertada o no.

En caso de que la decisión no sea afortunada que le propone usted al gerente.

17. Resuelva el siguiente problema.

Con la firma del tratado de Libre comercio con los Estados Unidos el gobierno nacional esta pensando en la recuperación del río Magdalena como medio para el transporte de mercancía entre el interior y la costa Atlántica. La compañía “El Buen Barco” dedicada al mantenimiento de Barcos ha decidido construir un muelle en Puerto Berrio donde se puede detener una embarcación para cargar combustible y recibir servicio. Suponga que las llegadas siguen una distribución de probabilidad Poisson, con una media de 6 embarcaciones por hora, y que los tiempos de servicio siguen una distribución de probabilidad exponencial, con una media de 8 embarcaciones por hora.

El gerente de la compañía quiere conocer lo siguiente, por favor ayúdelo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya embarcaciones en el sistema?

b) ¿Cuál es el número promedio de embarcaciones que estén esperando servicio?

c) ¿Cuál es el tiempo promedio que ocupará una embarcación esperando servicio?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio que ocupará una embarcación en el muelle?

Finalmente si usted fuera el administrador de “El Buen Barco”, estaría satisfecho con el nivel de servicio que proporcionara la empresa. ¿Por qué sí o por qué no?

18. Resuelva el siguiente problema.

El taller de servicio de Automotores Medellín está pensando en un sistema de servicio de dos canales. Los automóviles llegan de acuerdo con una distribución de probabilidad Poisson, con una tasa media de llegadas de 6 automóviles por hora. Los tiempos de servicio tienen una distribución de probabilidad exponencial, con una tasa media de servicio de 10 automóviles por hora para cada uno de los canales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún automóvil en el sistema?

b) ¿Cuál es el número promedio de automóviles esperando servicio?

c) ¿Cuál es el tiempo promedio esperando servicio?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio en el sistema?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que una llegada tenga que esperar para que le den servicio?

19. Resuelva el siguiente problema.

Considere una línea de espera de dos canales con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales. La tasa media de llegada es de 28 unidades por hora y la tasa media de servicio es de 20 unidades por hora en cada uno de los canales. Para la anterior situación responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna unidad en el sistema?

b) ¿Cuál es el número promedio de unidades en el sistema?

c) ¿Cuál es el tiempo promedio que una unidad esperará para que le den servicio?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio que una unidad estará en el sistema?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que esperar para que se le dé servicio?

Suponga que la línea de espera inicial se ha ampliado para ser operada con tres canales, en este caso:

a) Calcule las características de operación de este sistema de línea de espera.

b) Si la meta de servicio es tener capacidad suficiente para que no más de 25% de los clientes tengan que esperar atención, ¿se preferirá el sistema de dos o de tres canales?

20. **(Investigue!)**.

Los trabajos llegan de manera aleatoria a una oficina de diseño de ingeniería. Suponga que la tasa media de llegadas es de 5 trabajos por hora. Los tiempos de servicio no siguen una distribución de probabilidad exponencial. En la siguiente tabla se indica dos tipos de trabajos que llegan a la oficina.

Trabajo	Tiempo de Servicio	
	Promedio	Desviación Estándar
A	6.0	3.0
B	6.25	0.6

a) Cuál es la tasa media de servicio, en trabajos por hora, de cada uno de los diseños.

b) Para cada una de las tasas medias de servicio de la pregunta anterior ¿Qué diseño parecería obtener la mejor tasa de servicio, es decir la más rápida?

c) ¿Cuáles son las desviaciones estándar de los tiempos de servicio en horas?

d) Utilice el modelo M/G/1 para calcular las características de operación de cada uno de los diseños

e) ¿Qué tipo de diseño tiene las mejores características de operación? ¿Por qué?

UNIDAD 4. Teoría de Decisiones

1. Clasifique cada una de las siguientes decisiones según correspondan al caso de toma de decisiones utilizando datos previos o sin utilizar datos previos, y justifique su elección.

a) Construir un nuevo estadio de baloncesto

b) Elegir una universidad para inscribirse en ella

c) Decidir qué ruta utilizar para ir a trabajar todos los días.

d) Elegir un tamaño de muestra para utilizarlo a fin de probar los defectos en una línea de ensamble.

e) Decidir cuántos diarios deben solicitarse para venderlos cada día

2. Responda las siguientes preguntas.

a) Sugiera una situación en la que el modelo de decisión de pagos promedio pudiera conducir a una persona que toma decisiones a una decisión tal vez catastrófica.

b) ¿Por qué “no hacer cosa alguna” debe considerarse como una alternativa en todas las decisiones?

c) Comente en forma breve las condiciones bajo las cuales El Tomador de Decisiones utilizaría cada uno de los modelos de decisión sin datos previos.

d) Explique si para algún caso el valor de la información perfecta puede llegar a ser inferior al valor de la información de prueba

e) Explique por qué "no hacer nada" debe considerarse como una alternativa en todas las decisiones.

3. Explique porque las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. (Investigue cuando lo considere necesario)

a) Una persona que toma decisiones siempre debe intentar tomar la decisión óptima investigando y analizando todas las alternativas.

Verdadero ☐ Falso ☐

____

____

____

b) La programación lineal es un ejemplo de toma de decisiones bajo incertidumbre.

Verdadero ☐ Falso ☐

____

____

____

c) Las apuestas sobre los juegos de fútbol son ejemplo del uso de probabilidades subjetivas

Verdadero ☐ Falso ☐

____

____

____

d) En la toma de decisiones sin datos previos, el modelo de decisión que se utiliza depende en gran medida de la magnitud del riesgo que puede asumir quien toma las decisiones.

Verdadero ☐ Falso ☐

____

____

____

e) El modelo de decisión del VME siempre es apropiado si se dispone de probabilidades

Verdadero ☐ Falso ☐

---

f) En el análisis Bayesiano, deben utilizarse ya sea datos previos o probabilidades subjetivas en el análisis a priori.

Verdadero ☐ **Falso** ☐

---

g) En un problema de maximización, si la suma del valor de la información de prueba y el costo de la misma es inferior al valor previo del VME, se procede a realizar la prueba.

Verdadero ☐ **Falso** ☐

---

h) El análisis Bayesiano difiere del análisis clásico porque en este se utilizan muestras o pruebas y en el análisis Bayesiano no

Verdadero ☐ **Falso** ☐

---

4. En la tabla que se muestra a continuación se presenta la matriz de perdidas para un problema de decisión en el cual no existen datos previos disponibles. Utilice cada uno de los modelos de decisión que se analizaron en el texto para seleccionar la mejor alternativa. (A, B, C y D son estados de la naturaleza).

Alternativa	A	B	C	D
I	10	100	0	50
II	75	50	60	40
III	30	40	25	25

5. Resuelva el siguiente problema.

J&J es un contratista joven que tiene la oportunidad de elegir entre construir una casa o hacer dos trabajos de ampliación en los siguientes dos meses. Si construye la casa y puede venderla, ganaría $ 10,000. Sin embargo, si el mercado inmobiliario declina debido a aumentos en la tasa de interés hipotecario, J&J no podría venderla y perdería $5,000. Por otro lado, puede ganar $7,000 llevando a cabo los dos trabajos de ampliación, sin que importe el comportamiento del mercado.

a) Elabore una matriz de pagos para este problema.

b) Dibuje un árbol de decisión para este problema

c) Elija una alternativa utilizando cada uno de los modelos de decisión no probabilísticas que sean apropiados para este tipo de problema.

d) Si Chip ha decidido que la probabilidad de que la tasa hipotecaria aumente es 0.6 y las cantidades en dólares son una medida adecuada de su utilidad, determine la estrategia que debe seguir

6. Resuelva el siguiente problema.

Elija una alternativa para la solución del problema que se representa a través de la matriz de pagos de la tabla siguiente, donde también se incluyen las probabilidades de cada estado de la naturaleza. Para este problema de decisión en el que existen disponibles datos previos que pueden utilizarse para calcular probabilidades, dibuje el árbol de decisión.

Matriz de pagos

Alternativa	Estado de la naturaleza		
	X	Y	Z
1	300	400	700
2	400	500	500
3	200	600	200
4	400	300	500
Probabilidad	0.3	0.5	0.2

7. Resuelva el siguiente problema.

Su amigo JR intenta decidir cómo invertir los $10,000 millones que acaba de heredar. El tiene tres posibles maneras de invertir el dinero.

(A1) Comprar propiedades inmobiliarias en Cartagena.

(A2) Invertir en un nuevo invento de un colega, que sirve para ahorrar gasolina

(A3) Colocar el dinero en una inversión bancaria a cinco años que rinde el 10% anual.

La principal preocupación de JR es una posible escasez de gasolina en los próximos cinco años. Si ocurre esto y se raciona el combustible, las propiedades ubicadas en Cartagena aumentarán de valor a $14,000 millones, en tanto que el dispositivo para ahorrar gasolina producirá un rendimiento total de $25,000 millones. Por otro lado, si no ocurre el racionamiento las propiedades valdrán $23,000 millones, en tanto que el dispositivo de ahorro de gasolina producirá un rendimiento total de sólo $5,000 millones.

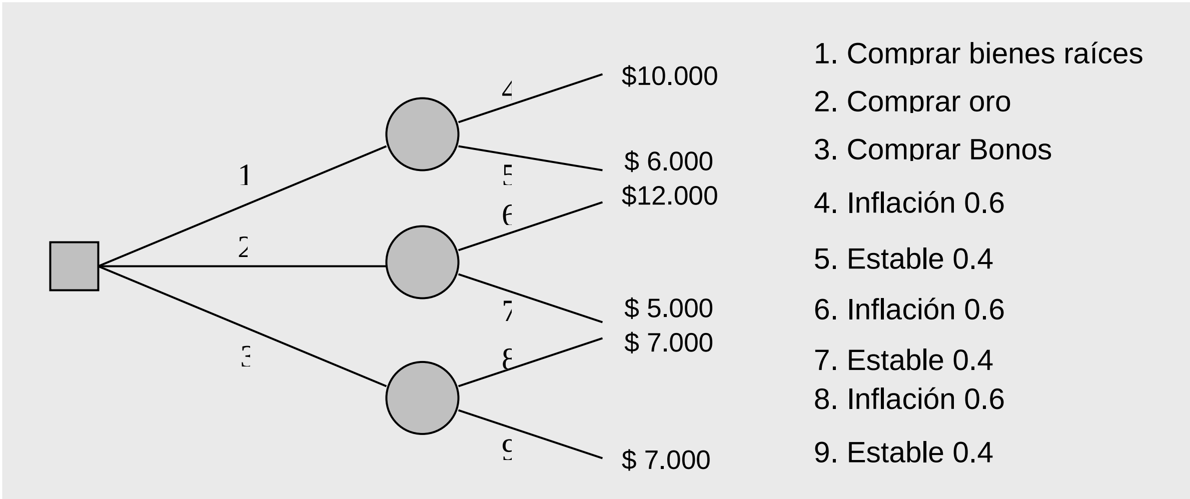
a) Elabore una tabla de pagos para este problema

b) Dibuje un árbol de decisión para el problema de su amigo.

c) Emplee cada uno de los modelos de decisión que no utilizan probabilidades y que se analizaron en este capítulo, para elegir un plan de inversión.

Si su amigo considera que la probabilidad de escasez de gasolina es 0.65 y los rendimientos monetarios son una medida adecuada de su utilidad, determine una estrategia apropiada para su amigo haga la inversión de la herencia.

8. Resuelva el siguiente problema.



En la gráfica se muestra el árbol de decisión del problema de un inversionista que tiene tres alternativas de inversión, donde la decisión depende de que haya o no inflación –estados de la naturaleza-.

a) Teniendo en cuenta los datos del árbol de decisión, escriba el problema en forma de matriz de pago.

b) Para el problema determine la decisión que maximiza el rendimiento total.

9. Resuelva el siguiente problema.

Juan Valdés debe decidir entre reparar su automóvil o comprar uno nuevo. Si Juan repara el carro y aún así éste se vuelve inservible antes de un año, el valor presente total será el gasto en las reparaciones más el gasto de la compra de un nuevo automóvil, es decir $6,000. Por otro lado, calcula que si el automóvil que tiene ahora dura más de un año, pero menos de tres, el valor presente de sus costos sería de $3,500. Por último, si el automóvil actual dura más de cinco años, el valor presente de sus costos será de sólo $2,000. Si vende el automóvil que ya tiene sin repararlo y compra de inmediato un automóvil nuevo, su costo será de $5,000, sin importar lo que le suceda al automóvil actual.

a) Elabore una matriz de pagos (costos) para este problema.

b) Dibuje un árbol de decisión para el problema de Juan.

c) De acuerdo con cada uno de los modelos de decisión elija la mejor decisión para Juan.

d) ¿Por qué, en este caso, el modelo de decisión del pesimista se convertiría en un enfoque minimáx, en vez del enfoque maximín que se utilizó para las tablas de pagos de esta capítulo? ¿Por qué el modelo de decisión del optimista es más bien minimín que máximas, para este problema?

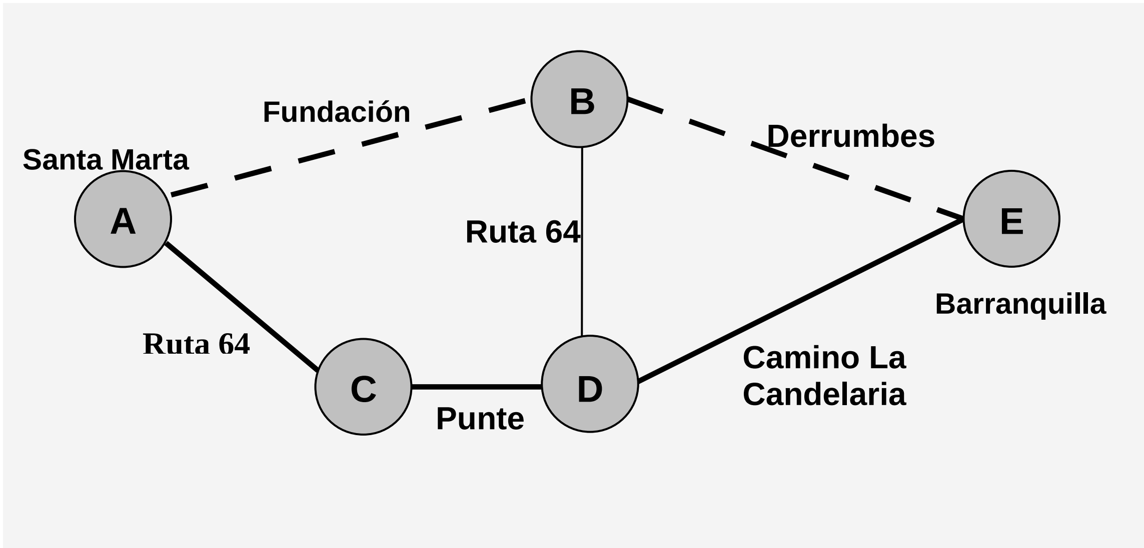
e) ¿En qué difiere el cálculo de los costos de oportunidad de una tabla de costos en comparación con una tabla de pagos?

10. Resuelva el siguiente problema.

Para el problema 9, Juan Valdés ha calculado que las probabilidades para el uso futuro de su automóvil son 0.3 para menos de un año de uso, 0.5 para entre uno y tres años y 0.2 para más de tres años. También ha asignado utilidades de 1, 5 y 10 a cada resultado. Compare las decisiones que se obtienen utilizando el VME y el VUE.

11. Resuelva el siguiente problema.

Carmen Bravo es la despachadora de la Flota Magdalena en Santa Marta. Su cargo le implica elegir las rutas para que los buses cumplan los itinerarios. Ella conoce que una ruta específica que va de Santa Marta a Barranquilla ha ocasionado problemas en el pasado. Los problemas se deben a derrumbes e inundaciones cuando llueve. El mapa muestra los diversos caminos que unen Barranquilla y Santa Marta con las áreas problemáticas. Los tiempos de viaje para los posibles caminos son:



Tramo de viaje	Tiempo en Bus (minutos)
A-B	30
A-C	15
A-C-D	20
A-B-E	45
A-C-D-E	50
D-B	15
D-E	30

Si se envía un bus de Santa Marta a través de la ruta 64 y el puente no está funcionando, tendría que regresar a Santa Marta y dirigirse después a Fundación. De manera similar, si un camión va por Fundación y encuentra derrumbes, entonces tendría que regresar por la ruta 64 y dirigirse por camino vecinal la Candelaria. Acaba de llover y Carmen intenta determinar cuál es la mejor ruta para enviar una flotilla de buses, de manera que, en lo posible, se eviten los retrasos. (Nota: puede haber inundaciones y derrumbes al mismo tiempo)

a) Elabore una matriz de pagos (tiempos) que muestre todas las alternativas posibles, los estados de la naturaleza y los tiempos correspondientes de viaje.

b) Elija un modelo de decisión que pueda utilizarse para elegir qué alternativa debe seguirse en este problema.

Haga lo mismo utilizando un segundo modelo de decisión.

12. Resuelva el siguiente problema.

Juan Fajardo de la compañía Fajardo & Vélez Compañía Ltda., tiene la oportunidad de colocar una cotización en uno de tres grandes proyectos gubernamentales de investigación. Los códigos del proyecto son Zeus, Thor y Atlas. Juan puede presentar una cotización para cada uno de los tres proyectos, pero existen diferentes costos de preparación y niveles de financiamiento para cada uno. Los estados de la naturaleza son los tres proyectos que pueden financiarse. El costo de la cotización para cada proyecto y la cantidad bruta del valor del contrato para cada uno de los tres estados de la naturaleza son:

Proyecto	**Costo**	**Asignación**
THOR	$40.000	$80.000
ZEUS	$50.000	$150.000
ATLAS	$100.000	$125.000

a. Elabore una matriz de pagos con base en los fondos netos que recibiría la compañía Fajardo & Vélez Compañía Ltda.

b. Aplique cada uno de los modelos de decisión apropiados a este problema para elegir estrategia que Fajardo & Vélez debe utilizar.

Juan ha asignado probabilidades subjetivas de 0.4, 0.3 y 0.3 para los fondos de Thor, Zeus y Atlas. Si los valores netos del financiamiento reflejan la escala de utilidad de Juan, utilice el modelo del VUE para elegir una alternativa

13. Resuelva el siguiente problema.

Para cierto problema de decisión se ha calculado la matriz de pagos de la tabla Utilizando el modelo de decisión del VME, calcule la decisión que arroja el mayor pago esperado.

Matriz de pagos

Alternativa	Estado de la Naturaleza		
	N1	N2	N3
A1	30	35	25

A2	15	40	25
A3	30	30	30
A4	20	30	45
Probabilidad	0.4	0.3	0.3

14. Resuelva el siguiente problema.

Pasteles Mama Juana se especializa en pasteles de pera. Los pasteles se venden al público a un precio de $350 y sus costos de producción son $200. Cualesquiera pasteles que no se venden al día siguiente de que se fabrican pueden venderse a un proveedor institucional en sólo $125. La propietaria de la Pasteles Mama Juana, Juana Márquez, ha recopilado algunos datos estadísticos sobre la demanda anterior:

Demanda diaria	0	10	20	30	40	50	60 o más
Número de días	5	5	15	10	10	5	0

a. Calcule la utilidad neta para cada alternativa de producción.

b. Determine la mejor alternativa de producción utilizando el modelo de VME

c. ¿Cuál es el valor de la información perfecta para esta decisión?

15. Resuelva el siguiente problema.

Cada tres días, FRUTOS DE MI TIERRA debe decidir cuántas cajas de fresas debe pedir para los siguientes tres días. Pepe Rojas, gerente de la FRUTOS DE MI TIERRA, ha determinado que si el clima es bueno en general durante ese periodo de tres días, puede vender 100 cajas, en tanto que si el clima no es tan bueno puede vender sólo 75 cajas. Si el clima es malo, las ventas son muy deficientes y puede vender sólo 50 cajas durante los tres días. Dado que la duración de las fresas en los anaqueles es de sólo tres días, las fresas que no se venden deben tirarse y no tienen ningún valor de recuperación. Pepe puede comprar fresas en $50 la caja y venderlas en $l00 la caja.

Los registros pasados del clima muestran que para cualquier periodo de tres días, el clima es bueno 50% del tiempo, regular 20% del tiempo y malo 30% de las veces. Con base en los datos que se proporcionan:

a) Defina cuáles son las alternativas y los estados de la naturaleza para Pepe (se suponen tres alternativas).

b) Elabore una matriz de pagos.

c) Determine la alternativa de mayores utilidades que podría emplear Pepe para ordenar las fresas.

d) ¿Cuál es el valor de la información perfecta para este problema?

16. Resuelva el siguiente problema.

En cada uno de los juegos locales de fútbol del Poderoso Deportivo Independiente Medellín, un grupo de estudiantes de la FUNLAM venden perros calientes y sándwiches. Ellos pueden adquirir estos productos en $1000 y venderlos en $1500. Los perros y sándwiches que no se venden carecen de valor después del juego, por lo que representan una pérdida para los estudiantes.

El número perros calientes y sándwiches que un estudiante individual puede vender depende de la cantidad de personas que acude al partido. Dado que muchos aficionados adquieren boletos en la entrada, no hay manera de saber con anticipación la cantidad de personas que acude a cualquier juego, al estudiar los registros históricos de asistencia Francis, una de las vendedoras estudiantes, ha determinado que se venden todos los boletos 50% de las veces, se vende 90% de la capacidad del estadio 30% de las veces y el 20% de los juegos tienen una entrada del 80% de su capacidad. Sus registros de ventas muestran que cuando hay un "lleno completo" se pueden vender 200 sándwiches; cuando hay una entrada del 90% se pueden vender 150, y cuando es del 80% se pueden vender 100 unidades. Si usted fuera amigo de Francis ¿Cuántos sándwiches le sugeriría comprar para vender en cada uno de los juegos?

17. Resuelva el siguiente problema.

Camilo Gómez, vicepresidente de mercadotecnia JUAN VALDEZ (Café de Colombia) está considerando cuál de dos planes de publicidad debe utilizar para los nuevos refrescos de cola con café. El Plan I costaría $500,000, en tanto que un enfoque más conservador, el Plan II, costaría sólo $100,000. En la tabla se muestran las utilidades brutas -antes de la publicidad- proyectadas para el nuevo refresco, para cada uno de los planes, y bajo dos posibles estados de la naturaleza: aceptación completa del producto y aceptación limitada.

TABLA Utilidades brutas

Plan de Publicidad	Estado de la Naturaleza	
	Aceptación Limitada	Aceptación Completa
Plan I	$400.000	$1´000.000
Plan II	$300.000	$500.000

Camilo estima que existen probabilidades iguales de una aceptación completa y de una aceptación limitada para el nuevo refresco.

a. Elabore una matriz de pagos de utilidades netas

b. Utilice las estimaciones subjetivas de probabilidad de Camilo para elegir un plan de publicidad.

c. ¿Cuál es el valor de la información perfecta en esta situación?

d. Es posible llevar a cabo una prueba de mercado del producto a través de una investigación que cuesta $50,000. En ocasiones anteriores en las que se ha empleado, se ha visto que esta investigación pronostica una aceptación completa en el 60% de los casos en los que se ha dado la aceptación completa y a pronosticado aceptación limitada el 70% de las veces en las que se ha dado una aceptación limitada. Utilice esta información para determinar si debe efectuarse esta investigación para ayudar a decidir con respecto a un plan de publicidad.

e. Utilice un árbol de decisión para ilustrar su análisis.

18. Resuelva el siguiente problema.

Suponga que quien toma la decisión frente a cuatro alternativas de decisión y cuatro estados de la naturaleza desarrollan la siguiente tabla o matriz de pagos de utilidades.

Alternativas	Estados de la Naturaleza			
	E1	E2	E3	E4
A1	14	9	10	5
A2	11	10	8	7
A3	9	10	10	11
A4	8	10	11	13

a. Si quien toma la decisión no sabe nada de probabilidades de los cuatro estados de la naturaleza. ¿Cuál es la decisión recomendada utilizando los enfoques optimista, pesimista y de arrepentimiento?

b. ¿Qué método prefiere usted? Explique.

c. Explique si es necesario que quien toma de la decisión debe determinar anticipadamente el método más apropiado, antes de analizar el problema.

d. Suponga que la tabla nos da costos en vez de utilidades. ¿Cuál es la decisión recomendada utilizando el enfoque optimista, conservador y de arrepentimiento?

19. Resuelva el siguiente problema.

La decisión de la dirección de Gaseosas "LUX" de producir un nuevo refresco trae como consecuencia la necesidad de construir una nueva planta, la cual puede ser pequeña o grande. La selección del tamaño depende de la forma en que reaccione el mercado al nuevo refresco. Con el fin de ayudar en el análisis de esta situación el departamento comercial ha decidido considerar la demanda a corto, mediano y largo plazo. La siguiente tabla (matriz de pagos) muestra la utilidad proyectada en millones:

Alternativas	Demanda		
	Corto plazo	Mediano plazo	Largo plazo
Planta pequeña	150	200	200
Planta grande	50	200	500

a. Construya un árbol de decisión para este problema

b. Recomiende una decisión con base en los métodos optimista, pesimista y de arrepentimiento.

20. Resuelva el siguiente problema.

La Compañía MORA –Servicio de Aseo- está considerando invertir en un nueva maquina brilladora de Piso que le permitirá prestar nuevos servicios a sus clientes. El gerente de MORA ha venido analizando cuidadosamente el problema y estima que si la demanda es alta para los nuevos servicios la inversión se redimirá, si la demanda es media podrá obtener una pequeña ganancia y por el contrario si baja perderá dinero. Específicamente, el gerente pronostica una utilidad de 70 millones si la demanda es alta, 20 millones si la demanda es media y tiene una pérdida de 9 millones si la demanda es baja. De otro lado, con base en un estudio de mercado, el gerente, estima que Probabilidad de demanda alta es de 0.4, de demanda media es 0.3 y de baja demanda es 0.3.

a) Prepare un árbol de decisión para el problema de la Compañía MORA.

b) ¿Cuál es el valor esperado para cada nodo del estado de naturaleza?

c) ¿El enfoque de valor esperado recomendaría la inversión de la Compañía Mora en una maquina brilladora de piso? Suponga que Mora puede adquirir una maquina brilladora que también puede ser utilizarse como limpiadora de pisos. Este modelo de maquina también debe estar disponible para servicios que ya se prestan por lo que esta no podrá todos los ingresos previstos pero su pérdida será menor en caso de que la demanda sea baja. Con esta alternativa, el gerente de MORA pronostica una utilidad de 3,5 millones si la demanda es alta, de un millón si es media y una pérdida de 1,5 millones si la demanda es baja.

d) Prepare un nuevo árbol de decisión mostrando las 3 alternativas.

e) ¿Cuál es la decisión óptima utilizando el enfoque de valor esperado?

f) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL

ANDERSON, David R.; SWEENEY, Dennis J y WILLIAMS, Thomas A. Métodos cuantitativos para los negocios. México: Thompson Editores. 1999.

DAVIS, K. Roscoe y MCKEOWN, Patrick O. Modelos cuantitativos para administración. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 1986.

KOLMAN, Bernard. Álgebra lineal con aplicaciones y MATLAB. México Prentice Hall, 6ta Edición. 1999. Capítulos 1 y 2. ISBN: 970-17-0265-4.

SOLER F, Francisco y otros. Álgebra lineal y programación lineal. Bogotá: ECOE Ediciones, 2004.ISBN: 958-648-409-2

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

ANDERSON, David R y otros, Introducción a los modelos cuantitativos para administración. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 6ª edición, 1993.

EPPEN, G. D y otros. Investigación de operaciones en las ciencias administrativas. México: Pearson- Prentice-Hall, 5ª edición. 2000.

HADLEY, G. Álgebra Linear. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano S.A. 1969

VARELA, Jaime Enrique. Introducción a la Investigación de Operaciones. Bogota: Editorial Fondo Educativo Interamericano. 1982

WINSTON, Wayne L. Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 1994

Webgrafía

Listado o referencia de sitios webs, blogs o portales de internet relacionados con el Algebra lineal y los Métodos Cuantitativos

http://www.informs.org/

http://www.invope.com/

http://www.eco-finanzas.com/administracion/escuelas/metodos_cuantitativos.htm

http://ideas.repec.org/s/pab/rmcpee.html

http://library.georgetown.edu/newjour/r/msg02812.html

http://www.eumed.net/libros/2006c/216/index.htm

http://www.scribd.com/doc/6303047/Metodos-Cuantitativos-en-Project-Management

http://metodoscuantitativos.50webs.org/

http://www.investigacion-operaciones.com/

http://www.itson.mx/dii/elagarda/apagina2001/PM/uno.html

http://www.ingenieria.cl/escuelas/industrial/archivos/apuntes_inv_operativa/cua500.pdf

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/matematicas-29.html

http://www.investigacion-operaciones.com/Solucion_Grafica.htm

http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T08.pdf

http://www.matematicas.unal.edu.co/cursos/algebra/

http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/algebralineal/index.htm

http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640S/SPANLineraAlg.htm

http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Seminario/paginas/Seminario_03/index.htm

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

GLOSARIO

Aleatoriedad: método para la formación de grupos de intervención y de control para diseños experimentales.

Análisis de sensibilidad: Simulaciones de escenarios mediante los cuales se busca observar los cambios en los resultados de un modelo que se obtienen del cambio intencionado de sus principales variables

Árbol de decisión: esta es una representación gráfica de cada uno de los acontecimientos que se presentarán a la hora de formular un problema de decisión. Muestra diferentes situaciones que a su vez despliegan eventos secuenciales, para así poder identificar alternativas que se van dando en el transcurso de la formulación del problema

Aversión al riesgo: se refiere a la situación en la que un inversionista, expuesto a alternativas con diferentes niveles de riesgo, preferirá aquella con el nivel de riesgo más bajo

Bono: Obligación financiera que estipula el pago periódico de un interés y la amortización del principal, generalmente con vencimiento a mediano o largo plazo

Capacidad de la Cola: Esta es la cantidad máxima de personas que pueden estar en una cola esperando a ser atendidos

Capital: medios para la producción, tales como: maquinaria, planta física de empresas, equipos de producción, entre otros

Certificados: son valores que emiten los bancos o empresas. Los plazos de los documentos, el valor nominal y la tasa de interés varían según las políticas de cada emisor

Confiabilidad: es el grado en el cual los valores medidos para cierto concepto son constantes.

Costo de oportunidad: Costo en que se incurre al tomar una alternativa y desechar otras; el costo de oportunidad de una determinada acción es el valor de la mejor alternativa sacrificada.

Costo marginal: Es el aumento sobre el costo total que se genera al incrementar la producción en una unidad más de un bien o servicio; el principal determinante del costo marginal son las variaciones que se producen en los costos variables.

Costo medio: Son los costos por unidad de producción. Los costos medios totales se calculan como el costo total entre la cantidad producida

Costos fijos: son los costos en que incurre la empresa, halla o no halla producción

Costos totales: Son equivalentes a la suma de los costos variables totales más costos fijos totales

Costos variables: Los costos variables dependen del volumen de producción

Datos: Colección de varias observaciones relacionadas en una o más variables

Demanda: cantidades de un bien que un consumidor esta dispuesto a adquirir, en un tiempo determinado

Desviación estándar: Medida de la dispersión de los datos. El cuadrado de la desviación estándar se denomina varianza.

Disciplina de colas: Regla para determinar el orden en el cual se seleccionan los miembros de la cola para comenzar el servicio.

Diseño experimental: es un diseño de investigación con grupos de intervención y de control creados a través de un proceso aleatorio.

Distribución Gausiana: Distribución que se representa en una curva simétrica, continúa y acampanada, en el cual el valor de la media corresponde al punto más alto en ella se distribuyen los datos que se han realizado en numerosas pruebas estadísticas

Distribución de probabilidad de Poisson: La distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta. Se utiliza para calcular la probabilidad de x ocurrencias en un intervalo especificado.

Distribución de probabilidad normal: Una distribución de probabilidad continúa. Su función de densidad de probabilidad tiene forma de campana y está determinada por la media, y la desviación estándar, σ.

Distribución de probabilidad exponencial: Distribución de probabilidad continua útil para describir el tiempo para terminar una tarea o el tiempo entre ocurrencias de un evento.

Ecuación: Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se denominan miembros de la ecuación. En ella aparecen números y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Eventos mutuamente excluyentes: se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno de ellos implica la no ocurrencia del otro.

Fondo de Inversión: Fondo de carácter mutuo y de cartera diversificada, cuyas participaciones están distribuidas en forma proporcional a sus aportes entre varios inversionistas

Función de probabilidad: Una función, identificada como ***f(x)***, que da la probabilidad de que una variable aleatoria discreta ***x*** tome algún valor específico.

Función objetivo: Término matemático en un modelo que da la medida de desempeño de un problema dado en términos de las variables de decisión.

Ganancia: Dinero que sobra después de haber realizado la venta de los bienes, una vez deducidos todos los costos.

Gastos financieros: Gastos correspondientes a los intereses de las obligaciones financieras.

Habilidad empresarial: Destreza que posee parte de los recursos humanos para intervenir los problemas de la empresa con el fin de utilizar adecuadamente los recursos. Los empresarios aportan ideas nuevas, sobre qué, cómo, y dónde producir, toman decisiones de negocios y asumen el riesgo que surge de sus decisiones

Hipótesis de Estudio: Es la afirmación de la existencia de una asociación entre dos o más variables en la población de la que procede la muestra. Puede ser unilateral o bilateral. Unilateral es cuando solo considera las asociaciones en una dirección y bilateral cuando no se especifica la dirección de la asociación

Hipótesis nula: Es la afirmación de que no existe una asociación o diferencia verdadera entre las variables de la población de la que se extrajo la muestra estudiada.

Impuesto: es el monto en dinero que se debe pagar al estado por diversos rubros, para que este tenga el financiamiento para las necesidades y proyectos públicos.

Implementación: Llevar a cabo la intervención.

Interés: Es el precio pagado por el uso de un dinero prestado.

Interés compuesto: Es el que se calcula sobre el principal más los intereses acumulados en períodos anteriores.

Interés simple: Es el que se calcula con base al monto del principal únicamente y no sobre el interés devengado.

Inventarios: Bienes que las empresas tienen disponibles para atender eventuales cambios en la demanda

Inversión: Activo o recurso tangible o intangible comprometido en un proyecto con la expectativa de ganancia y la asunción de riesgo económico

Inversionista: Persona física o jurídica que aporta sus recursos financieros con el fin de obtener algún beneficio futuro. Constituyen la contraparte de los emisores. En otras palabras, son las personas físicas o jurídicas que disponen de recursos financieros, los cuales prestan a cambio de la obtención de una ganancia

Ley de la demanda: esta ley se refiere a la relación inversa que existe entre el precio y la cantidad demandada, se refleja en la pendiente negativa de la curva de la demanda

Ley de la oferta: es cuando se incrementa el precio de un bien o servicio causando al mismo tiempo un incremento en la cantidad ofrecida

Margen de utilidad: Diferencia entre el precio de venta y el costo de un producto

Matriz: es una ordenación rectangular de números, cantidades abstractas, que pueden sumarse y multiplicarse. Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales.

Maximización de la utilidad: Tendencia que guía las decisiones de compra de los consumidores o demandantes, impulsándolos a obtener la máxima utilidad.

Media: Medida de tendencia central que representa el promedio aritmético de un conjunto de observaciones

Métodos cuantitativos: es la metodología de la investigación que produce datos numéricos para ayudar al administrador en la toma de decisiones.

Método de eliminación: método que consiste en transformar el sistema lineal original en otro más sencillo de fácil solución; cuyo resultado sea igual al original.

Modelo: Representación simplificada de la realidad que busca explicar aquello puede ser relevante dentro de esa realidad.

Modelo conceptual: es el diagrama que representa las relaciones causales entre los conceptos relevantes importantes de una intervención.

Muestra del estudio: esta constituida por los participantes seleccionados para experimentar ya sea la intervención o las condiciones de control en un diseño de investigación.

Muestreo aleatorio: Técnica para seleccionar una muestra del estudio, así la selección puede hacerse aleatoriamente y cada participante tiene una probabilidad conocida de ser seleccionado.

Oferta: Cantidades de un bien que los productores están dispuestos a ofrecer en un determinado tiempo a diferentes precios.

Población finita: Se habla de este tipo de población cuando el número de personas o cosas que conforman el estudio estadístico es finito; es decir, un dato específico, por ejemplo: número de habitantes en una familia

Población infinita: Se habla de este tipo de población cuando el número de personas o cosas que conforman el estudio estadístico es infinito, o bien es muy grande como para considerarlo como tal, por ejemplo: número de personas que fuman entre dos o tres cigarros por hora

Precios: Cantidad de efectivo o dinero que se pagan por los bienes y servicios.

Producción: proceso mediante el cual se crean los bienes y servicios económicos, es la actividad primordial de un sistema económico, organizado para producir, distribuir y consumir bienes y servicios necesarios para suplir con las necesidades de la población

Productividad: es la razón entre la producción (bienes y servicios) total por unidad de insumos (recursos productivos) en cierto periodo de tiempo dado.

Punto de equilibrio: En la teoría financiera, se define el punto de equilibrio de operación como el nivel de producción necesario para cubrir tanto los costos fijos como los costos variables. En economía, generalmente, es el punto de intersección entre la oferta y la demanda.

Recursos: son todos los medios o todo aquello que se emplea para la producción de bienes y servicio, es de suma importancia mencionar que son escasos

Región factible: Región que cumple con las restricciones de un modelo y permite que cualquier combinación que se presente dentro de ella pueda resultar como una combinación posible.

Regla de decisión: Criterio que hemos seleccionado y que nos permitirá tomar una decisión de acuerdo con los resultados muestrales obtenidos; con base a ella se decide si la hipótesis nula (Ho) se debe rechazar o si se debe mantener.

Rendimiento: Interés que un activo devenga, como compensación a su poseedor

Rentas: Ingresos que perciben los propietarios de los factores productivos a cambio de su cesión. Las rentas de la tierra se llaman alquileres, las rentas del trabajo se llaman sueldos o salarios y las rentas del capital reciben el nombre de beneficios, intereses y otros

Restricción: limitante de un modelo matemático que recaen sobre las distintas variables de dedición. Desigualdad o ecuación en un modelo matemático que expresa algunas limitaciones sobre los valores que pueden asignarse a las variables de decisión, son limitantes a las que se ven expuestas las pautas de decisión, en función de ellas es que se establece el resultado

Riesgo: Probabilidad de que ocurra un suceso durante un período determinado. Es la posibilidad de enfrentar un resultado adverso o una cierta pérdida

Rotación de inventarios: Número de veces que, en promedio, una mercancía almacenada se reemplaza durante un período específico

Salario: Remuneración económica por un servicio o actividad realizada por una persona, conocida como trabajador. Este pago se puede dar en dinero o en especie (como vivienda, educación, entre otros).

Servidor: Elemento que sirve a los clientes que llegan al sistema de colas

Sistemas de producción: Proceso específico por medio del cual los elementos se transforman en productos útiles. Un proceso es un procedimiento organizado para lograr la conversión de insumos en resultados

Sistema Lineal: Conjunto de ecuaciones lineales capaces de representar una situación problemática (modelo)

Solución factible: Resultado que encaja al mismo tiempo en todas las restricciones planteadas en un modelo de programación lineal

Solución óptima: Solución factible que mejor se ajusta a la función objetivo, o sea, que maximiza o minimiza el valor de la función objetivo

Tamaño de la muestra: Número de unidades experimentales de la muestra utilizada para un estudio

Teoría de colas: Estudio que permite caracterizar las situaciones en que un individuo debe esperar para ser atendido y que ayuda al administrador a resolver la disyuntiva entre costos-servicio.

Teoría de la decisión: Esta es la opción de un criterio de decisión (una meta); es decir, la utilidad esperada maximizada. Es utilizada por el tomador de decisiones para medir el valor esperado del resultado de la decisión tomada

Teoría de matrices: Rama de las matemáticas que se centra en el estudio de matrices.

Tomador de decisiones: Es la persona o grupo responsable, que tiene como objetivo, tomar la mejor decisión posible, esto bajo su propia perspectiva o punto de vista

Utilidad: es la satisfacción obtenida por el consumidor cuando consume un bien. En contabilidad, es la diferencia positiva entre los ingresos y los costos y gastos

Valor: Suma máxima que una persona o entidad está dispuesta a pagar por un servicio o bien.

Valor actual neto (VAN): Es el valor presente de los flujos de efectivo de un proyecto descontados a una tasa de interés dada

Valor esperado Promedio ponderado de los valores de la variable aleatoria, para el cual la función de probabilidad proporciona las ponderaciones. Si un experimento puede ser repetido un gran número de veces, el valor esperado se puede interpretar como el "promedio a largo plazo".

Valor presente neto: Igual a Valor Actual Neto

Variable: Cualquier cualidad, fenómeno o acontecimiento que puedan tener valores cuantitativos diferentes.

Variable de decisión: Variable algebraica que representa una decisión cuantificable a ser adoptada, son cantidades, datos o supuestos a considerar en la elaboración del modelo, en otras palabras son las proporciones a cuantificar en función de ciertos objetivos y restricciones.

Variable dependiente: Propiedad o característica que se trata de cambiar mediante la manipulación de la variable independiente. La variable dependiente es el factor que es observado y medido para determinar el efecto de la variable independiente, resultado que uno pretende explicar o estimar. La variable dependiente puede ser definida como los cambios sufridos por los sujetos como consecuencia de la manipulación de la variable independiente por parte del investigador

Variable independiente: Característica que supone ser la causa del fenómeno estudiado. En investigación experimental se llama así, a la variable que el investigador manipula. Variable que se mide para determinar el valor correspondiente de la variable dependiente. Las variables independientes definen las condiciones bajo las cuales se examinará la variable dependiente

RESPUESTA A PREGUNTAS FRECUENTES

1. ¿Qué son las ciencias de la administración?

   Las Ciencias de la Administración, se pueden definir como: la aplicación de procedimientos, técnicas y herramientas científicas que permiten modelar los problemas operativos de la empresa, con el objeto de desarrollar y ayudar a evaluar soluciones. Es decir que la ciencia de la administración, como disciplina incluye todos los enfoques racionales basados en métodos científicos que se aplican en la toma de decisiones.

2. ¿Qué es un modelo?

   Es una representación simplificada de la realidad compleja que se elabora con el fin de facilitar su comprensión. Los modelos pueden ser de varios tipos: mentales, a escala y matemáticos. Estos últimos pueden ser descriptivos o normativos; a través de los modelos matemáticos se puede representar y solucionar problemas administrativos de las diferentes áreas de la empresa.

3. ¿Qué métodos de solución se pueden utilizar para solucionar los problemas de las Ciencias de la Administración?

   El modelo matemático que representa el problema debe estar acompañado de una solución. No obstante esta solución no siempre es analíticamente posible; por esta razón se puede recurrir a tres métodos de solución de los modelos matemáticos, ellos son: los métodos heurísticos, las simulaciones y los Algoritmos. *Métodos heurísticos*. Con estos métodos se llegan a soluciones aproximadas y aceptables con base en reglas empíricas e intuitivas. Esta metodología es utilizada cuando la solución analítica no es posible, o compleja y las simulaciones poco prácticas, costosas ó con una relación Beneficio-Costo desfavorable. *Simulaciones*. Con esta metodología de solución se simula la conducta de un problema para un conjunto definido de condiciones de entrada, eligiendo el mejor comportamiento, el cual no necesariamente será el óptimo. La simulación es utilizada cuando la representación del problema involucra un número muy grande de variables o cuando no es posible hallar una solución analítica. *Algoritmos*. Es un conjunto de procedimientos o reglas que, cuando se siguen de manera ordenada, proporcionan la mejor solución matemática para un modelo determinado. Es necesario precisar que debido a que los algoritmos se desarrollan para un tipo de modelo dado o definido este será solo aplicable para los problemas que se ajusten a las características del modelo

4. ¿Tiene algún tipo de limitantes la aplicación de las ciencias administrativas en la solución de los problemas empresariales?

La aplicación de los métodos cuantitativos a la solución de los problemas empresariales presenta dos tipos de limitaciones. La primera hace referencia a la estructura misma de los modelos ya que estos son representaciones simplificadas de la realidad y los segundos tienen que ver con la solución y aplicabilidad de los modelos mismos.

Considerando que los métodos cuantitativos no son más que técnicas que permiten modelar situaciones y problemas empresariales es natural que al aplicarlos haya que realizar algunas simplificaciones del problema real, usualmente complejo, con el fin de poderlo modelar. El proceso de simplificación produce un modelo del problema simplificado que puede manipularse con el fin de obtener una solución inicial. El ejemplo más típico de esto es la modelación que se hace en economía del mercado, donde entre otros, se hace el supuesto de que existe competencia perfecta; aunque esta es una consideración bastante fuerte, aún así es posible desarrollar un modelo económico útil para estudiar los efectos de diversas fuerzas sobre el mercado. De esta forma, dado que los modelos son representaciones simplificadas de la realidad, los administradores deben cuestionarse si el modelo o los modelos que pretenden utilizar si representan el problema que quieren solucionar. En muchas ocasiones son tantas las simplificaciones que se hacen al momento de elaborar un modelo que este no resulta útil para apoyar la toma de decisiones.

Otro limitante de las ciencias de la administración o los métodos cuantitativos es que en los modelos normativos consideran solo una función objetivo, no obstante en la práctica quien toma las decisiones tiene otros objetivos, por ejemplo, aparte de maximizar las utilidades o minimizar los costos. Eventualmente otros objetivos pueden ser determinantes, razón por la cual los administradores que hacen uso de este tipo de modelos debe cuestionarse si su uso resulta acorde con los requerimientos y objetivos de la empresa. En los últimos años se han hecho algunos avances en los modelos de múltiples objetivos, la técnica de programación de metas es uno de ellos.

Existen otro tipo de limitaciones de tipo operativo que tienen que ver con el tamaño de los modelos y la cantidad de cálculos que es necesario realizar cuando se quiere solucionar estos; no obstante, estas limitaciones son cada vez menores ya que hoy día el acceso a las computadoras es mayor y los tiempos de procesamiento de estas maquinas menor

5. ¿Qué uso práctico tienen los modelos en la Administración de los negocios?

   Los modelos matemáticos permiten representar y solucionar los problemas de la empresa y desde el punto de vista práctico, sirven para soportar y ayudar al responsable en la toma de decisiones. Hasta hace pocos años la decisiones en la empresa se tomaban con base en la experiencia e intuición de los administradores y dueños; no obstante, hoy en día, con la dinámica y competitividad de los mercados el administrador se tienen que valer de herramientas que le permitan soportar la asignación de los recursos y las decisiones sobre el futuro de la empresa.

6. ¿Qué es un sistema lineal?

   Un sistema lineal es un conjunto de ecuaciones lineales que modelan un problema o una realidad en varias dimensiones. Desde lo administrativo es una herramienta que permite modelar y solucionar muchas situaciones y problemas de la empresa; con el fin de orientar al administrador o gestor en la toma de decisiones.

7. ¿Qué es una Matriz y cuales son sus aplicaciones?

   Las matrices son arreglos rectangulares de números abstractos que pueden operarse entre si, a partir de unas reglas. A través de las matrices se pueden representar y resolver los sistemas lineales, los cuales, como se menciono, pueden servir para modelar los problemas de la empresa.

8. ¿Qué son los modelos de programación lineal?

   Los modelos de programación lineal son una formulación matemática con base en ecuaciones lineales, que permite representar el problema de asignación de los recursos escasos a las distintas actividades que conducen a la consecución de una meta o de un objetivo en una empresa u organización. El modelo sirve para trabajar problemas tan diversos como: la producción, el mercadeo, las finanzas, la planeación de personal, entre otros.

9. ¿Para qué sirven los modelos de programación lineal?

   Como ya se explico la Programación lineal permite modelar y solucionar los problemas de la empresa relacionados con la utilización óptima de los recursos que se asignan a una iniciativa. La solución del modelo entrega la información sobre los recursos que debe utilizar para maximizar o minimizar una variable determinada. No obstante, la condición normativa del modelo, la información debe ser evaluada y contextualizada por el responsable para tomar la decisión de asignar o no los recursos de acuerdo a los resultados arrogados.

10. ¿Qué es la teoría de colas?

    Son modelos matemáticos que permiten describir el comportamiento de una cola en la cual esperan los usuarios o clientes para recibir un servicio. Estos modelos ayudan al administrador a dilucidar la disyuntiva entre tener mayores costos y clientes satisfechos (buen servicio) o por el contrario menores costos y clientes insatisfechos (mal o regular servicio). Los modelos son descriptivos así que solo orientan, la decisión la debe tomar el responsable considerando diferentes factores como: la competencia, las condiciones del mercado, el conocimiento de los clientes, entre otros asuntos

11. ¿Qué es la toma de decisiones?

Es el proceso que debe seguirse cuando existe la necesidad de elegir la solución para un problema entre dos o más alternativas que pueden considerarse como soluciones a dicho problema. Para esto el tomador de decisiones deberá realizar varias acciones antes de poder elegir una alternativa de solución que sea satisfactoria y suficiente. Las actividades a las cuales se hace referencia son: Detección del problema, Recolección de información, Elaboración del modelo, Generación de alternativas de solución y Elección de la solución suficiente y satisfactoria