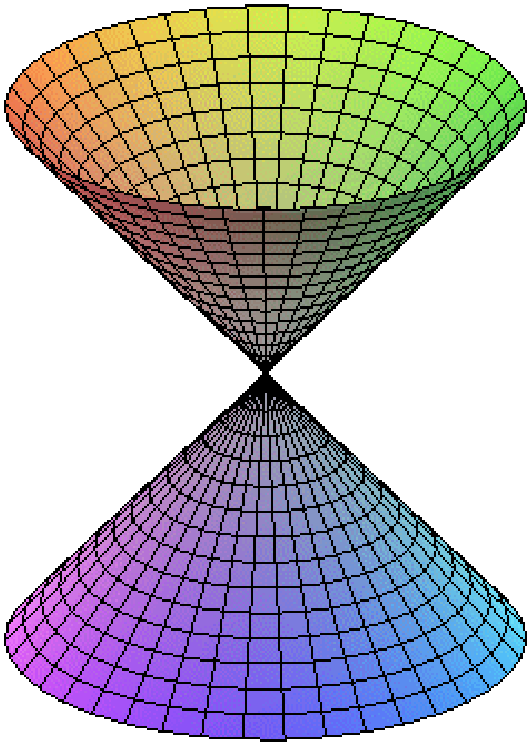
CÁLCULO INTEGRAL

Por: Edivar Fernández Hoyos



INTRODUCCIÓN

Esta guía tiene como objetivo darte una introducción rápida para que inicies el curso de Cálculo Integral, comprendiendo: ¿Qué es? Y ¿Cómo se relaciona? Con tu curso anterior de Cálculo Diferencial, así como ofrecerte las explicaciones necesarias y los problemas "tipo" resueltos de manera clara y sencilla que aunadas a las explicaciones dadas en clase por tu profesor, te permitirán iniciarte rápidamente en la resolución de integrales inmediatas de tipo algebraico, trigonométrico, exponencial y logarítmico, usando el formulario básico de integrales así como el empleo del método de integración por cambio de variable para resolver aquellas integrales indirectas que no se ajustan aparentemente a ninguna de las fórmulas elementales convenidas.

Los procesos matemáticos empleados en la resolución de integrales requieren de tus conocimientos básicos de algebra y trigonometría, de tu capacidad deductiva y de tu trabajo constante.

"Todos los caminos que conducen al conocimiento son intrincados y difíciles pero representan la mayor aventura que puede tener el intelecto humano"

CÁLCULO INTEGRAL

El curso de Cálculo Integral aplica los aprendizajes previos de: Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, en el estudio significativo de las funciones y sus diferenciales así como sus aplicaciones en el cálculo de áreas de regiones planas limitadas por curvas y el cálculo de volúmenes de sólidos irregulares, longitudes de arco y aplicaciones a la física del movimiento, trabajo y energía, presión, centroides de masa, momentos de inercia, etc..

El cálculo proporciona a los estudiantes, ingenieros y tecnólogos los conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La integración se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería y la tecnología aplicada, especialmente en la física, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

Objetivo

El objetivo principal de ésta guía es la de permitir al estudiante del nivel medio superior acceder a los principales conocimientos del Cálculo Integral de manera sencilla y práctica permitiéndole aplicar los algoritmos fundamentales para resolver con precisión las diferentes integrales que se presentan en diversos campos del quehacer científico y técnico.

En ésta guía dividida en tres partes se presentan problemas "tipo" resueltos de tal modo que sirvan de apoyo para lograr la solución de los diferentes problemas propuestos al final de la misma. Cuenta además con un módulo llamado "SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN GUÍAS Y PROBLEMAS ESPECIALES" dónde encontrará infinidad de problemas resueltos paso a paso para facilitar el estudio de las técnicas de integración.

Se tiene también un módulo anexo de la GUÍA I conteniendo la solución "paso a paso" de 114 problemas propuestos, los cuales facilitarán el empleo de los algoritmos básicos y el uso del álgebra como herramienta de adecuación de los problemas a los algoritmos señalados.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

En el curso anterior de Cálculo Diferencial nos enfocamos en el problema de calcular la Derivada de una función y nos preocupamos por encontrar la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función cualquiera ,del tipo: y=f(x) en cualquiera de sus puntos en un cierto intervalo (ab) ∈ R: de éste modo llegamos a la definición de la derivada f'(x) y vimos que f''(a) es la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a.

Ahora analizaremos la siguiente situación:

Dada una función $y=f(x)$ y un valor inicial de x, digamos x_0, encontramos la pendiente de la recta tangente en $[x_0 , f(x_0)]$, la cual está dada por $m=f'(x_0)$. La ecuación de esa recta tangente es $y-f(x_0)=m(x-x_0)$.

Supongamos que ahora ocurre un cambio en x, de x_0 a x_0+dx (*dx* es una cantidad). A ese nuevo valor de *x* corresponden dos valores de *y*, uno para la curva *y=f(x)* y otro para la recta tangente ya encontrada anteriormente.
Hay dos cantidades de interés:
(1) el cambio que ocurre en el valor de *f* (que llamaremos Δ y).
(2) el cambio que ocurre en el valor de *y* para la recta tangente (que llamaremos *dy*).

De acuerdo con esto definiremos lo siguiente:
Sea *y=f(x)* una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número *x,*
La diferencial de *x:* Es cualquier número real diferente de cero (se denota como *dx*).
La diferencial de *y:* Se define como *dy=f '[x] dx* (se denota por *dy*). Puede decirse que la diferencial de una función es el producto de la derivada de la función por la diferencial de su variable.

INCREMENTOS Y DIFERENCIALES
Para funciones de una variable y=f(x) ,se define el incremento de "y" como Δ y =f (x+ Δ x)-f (x) y la diferencial de "y" como : d y = f´(x) dx
Δ y representa el cambio en la altura de la curva : y=f(x) ,y dy representa la variación en " y " a lo largo de la recta tangente, cuando " x " varía en una cantidad.

En la siguiente figura se muestra "d f ". y Δx .

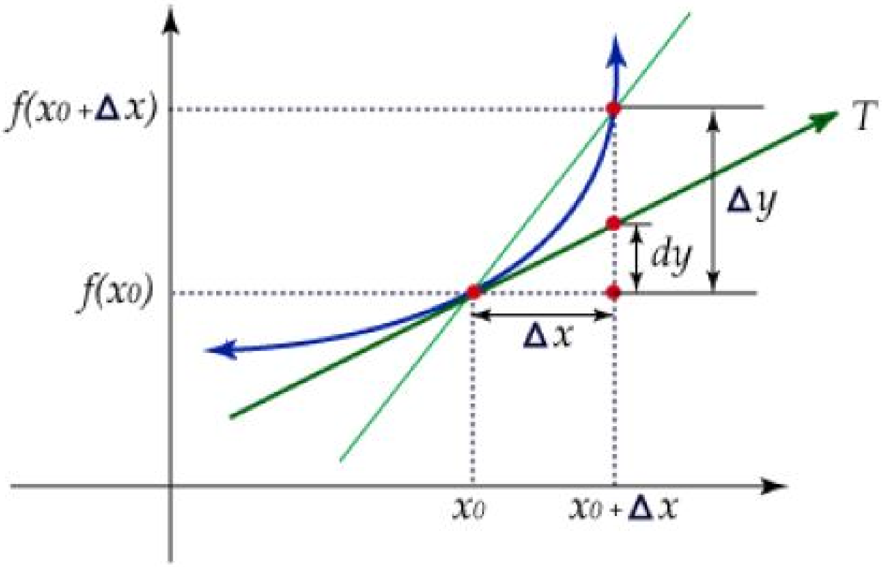


Figura 1: diferencial de una función

Observe que : ***Δy – dy*** se aproxima a cero más rápidamente , ya que

$$\epsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

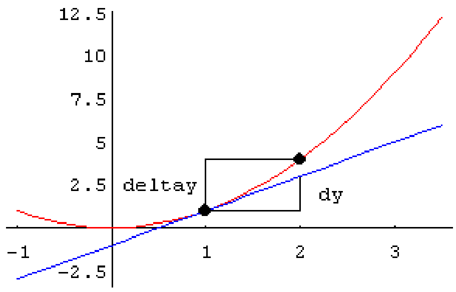
y al hacer $\Delta x \to 0$, tenemos que $\epsilon \to 0$

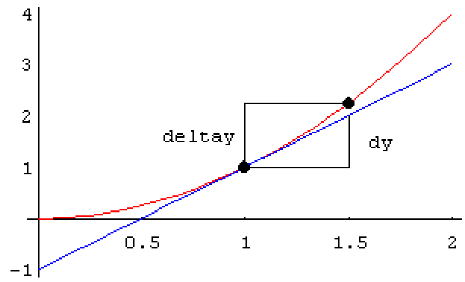
Por lo tanto: $\Delta y = dy + \epsilon\,\Delta$

Donde $\epsilon \to 0$. conforme $\Delta x \to 0$.

Ilustración de diferenciales

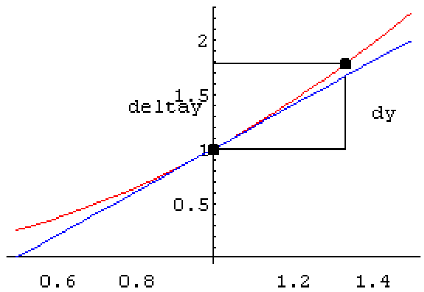
En las siguientes gráficas se calculan, para una función dada (x^2) y un valor dado de $x=x_0$, y varios valores del "cambio en x" o sea el número *dx* (o *x*), el cambio en el valor de *f(x)* (llamado *y*) y el valor de *dy*.

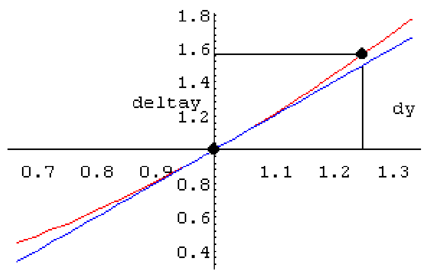




x = 1.0 *y = 3.0* *x = 0.5* *y = 1.25*

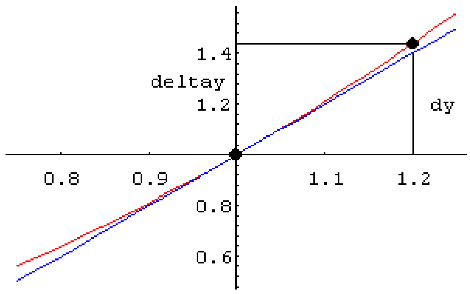
y - dy = 1.0 dy = 2.0 *y - dy = 0.25* *dy = 1.0*

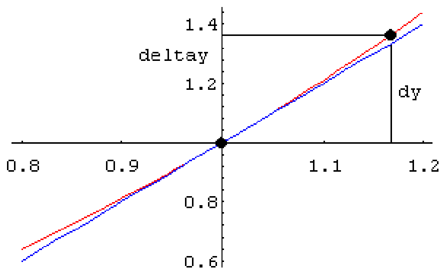




x = 0.33 *y = 0.778* *x = 0.25* *y = 0.5625*

y - dy = 0.111 dy = 0.667 *y - dy = 0.0625* *dy = 0.5*

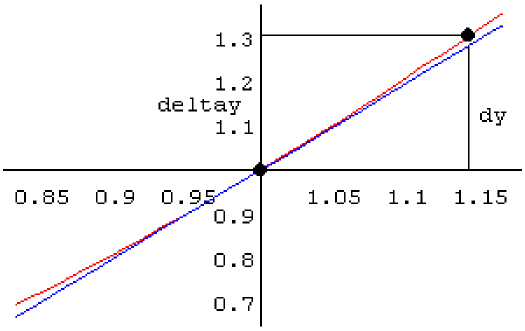


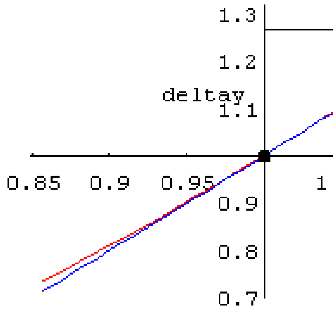


x = 0.2 *y = 0.44* *x = 0.167* *y = 0.361*

y - dy = 0.04 *dy = 0.4* *y - dy = 0.0278* *dy = 0.333*

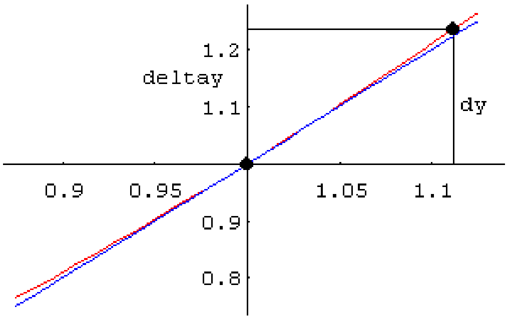
Función	Derivada
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = sen(2x)$	$f'(x) = 2\cos(2x)$

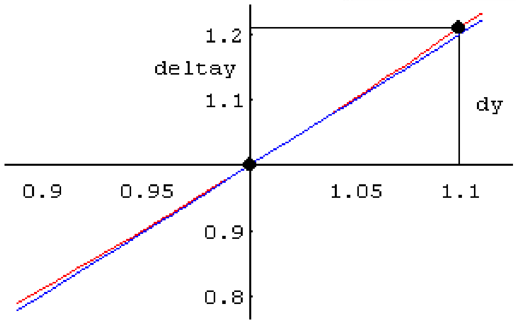




x = 0.143 *y* = 0.306 *x* = 0.125 *y* = 0.266

y - *dy* = 0.02 *dy* = 0.286 *y* - *dy* = 0.016 *dy* = 0.25





x = 0.111 *y* = 0.235 *x* = 0.1 *y* = 0.21

y - *dy* = 0.012 *dy* = 0.222 *y* - *dy* = 0.01 *dy* = 0.2

Como habrás observado, conforme más pequeño es *dx,* más cercanos están los valores de Δy & dy, y ésta es una de las aplicaciones de las diferenciales: aproximar con *dy* el cambio real de una función (Δy).

Para valores pequeños de *dx* , Δy *y* es aproximadamente igual a *dy*.

Por lo tanto, Δy = $f(x_0+dx)$ - $f(x_0)$ aprox. igual a *dy*, de donde obtenemos que:

$f(x_0+dx)$ = aproximadamente a $f(x_0)$ + dy

Ejemplos del manejo de diferenciales

Veamos algunos ejemplos del cálculo de diferenciales:

1)	$f(x) = 3x^2 + 5x - 6$
2)	$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$

3)	$f(x)=7^{3x^2-1}$
4)	$f(x)=e^{tgx}$
5)	$f(x)=\ln \operatorname{sen}\sqrt{x}$
6)	$f(x)=\log_x \sqrt{x}$

Utilizando diferenciales para aproximaciones

Consideremos la función $f(x)=(1/x)^{1/2}$ y dos valores de x : $x_0=100$ y $x_1=96$.
Por lo considerado anteriormente tenemos que:

$\Delta y = f(100) - f(96)$

$f(96) = f(100) - \Delta y$, aproximadamente igual a $f(100) - dy$

$f(96) = f(100) - f'(100)$

$dx = f(100) - f'(100)\ (96 - 100)$

$f(x)= \frac{1}{x^{1/2}}$; $x_0=100$; $x_1=96$; $dx = -4$

$f(x_0) = \frac{1}{10}$

$f'(x)= \frac{-1}{2x^{3/2}}$; $f'(x_0)= -(\frac{1}{2000})$

$dy = f'(x_0)\ dx = \frac{1}{500}$

$f(96) = f(100)+dy = \frac{51}{500} = 0.102$ el cual es un valor **aproximado**

El valor <u>exacto</u> de $f(96) = \frac{1}{4(6)^{1/2}}$ es 0.102062

ACTIVIDAD I: Ejercicios y problemas de diferencial de una función

A.-Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

B.-Calcular el incremento del área del cuadrado de 2 m de lado, cuando aumentamos 1mm su lado.

C.-Un cuadrado tiene 2 m de lado. Determínese en cuánto aumenta el área del cuadrado cuando su lado lo hace en un milímetro. Calcúlese el error que se comete al usar diferenciales en lugar de incrementos.

D.-Hallar la variación de volumen que experimenta un cubo, de arista 20 cm, cuando ésta aumenta 0.2 cm su longitud.

E.-Calcula el error absoluto y relativo cometido en el cálculo del volumen de una esfera de 12.51 mm de diámetro, medido con un instrumento que apreci a milésimas de centímetro.

F.-Si en lugar d $\sqrt{0.80}$ se halla $\sqrt{0.81} = 0.9$. ¿Cuáles son las aproximaciones del error a bsoluto y relativo?

Antiderivadas y la constante de integración

Hasta ahora solo nos hemos dedicado a calcular o encontrar la derivada de una sola función cualquiera f(x); es decir f'(x); sin embargo como toda operación matemática también la derivación tiene su inversa que es la integración indefinida, de este modo se cierra un ciclo operativo entre la derivación y la integración así como ocurrió con la multiplicación y la división.

La operación de integración debemos entenderla como un procedimiento algebraico que nos permite hallar la función f(x) cuando solo conocemos su derivada: f^1 (x).

Este proceso requiere pensar o trabajar en sentido contrario a como lo hacemos al derivar por lo cual puede parecer complicado; sin embargo nos vamos a apoyar en nuestras formulas de derivación para establecer un formulario básico que nos simplifique el trabajo.

Primero dejaremos claros algunos conceptos:

Para denotar la operación de integración usaremos el signo integral: $\int$ al frente de la expresión matemática llamada diferencial de la función: $f'(x)dx$ de la siguinte manera:

$$\int f'(x)dx$$

A la parte que está a la derecha del símbolo integral también se llama integrando.

Al resolver una integral obtendremos la función primitiva en "x": ***F (x) +c***, también llamada ***antiderivada*** de la función ya que se cumple que $\frac{d}{dx}F(x) +c = f(x)$ y de este modo se obtiene ***dF(x) +c) = f(x) dx*** que es el integrando original y donde: "**c**" es una constante cualquiera llamada ***constante de integración***.

Cabe destacar que al derivar el resultado de la integración estaremos comprobando esta integración. Ejemplo: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

Derivando $\frac{x^3}{3} + c$ obtendremos. $\frac{1}{3}(3x^2) + 0 = x^2$

$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) = x^2$, de donde el diferencial: $d(\frac{x^3}{3} + c) = x^2 dx$ es el integrando original.

El proceso de integración es un proceso inverso a la derivación por lo cual es importante entenderlo primero con ejemplos sencillos para posteriormente efectuarlo apoyándonos en un formulario básico obtenido directamente de las formulas de derivación.

Problema 1. Encuentra una función f(x) sabiendo que su derivada es: 2x
Si representamos matemáticamente ésta información tendremos que: f '(x)= 2x, por lo que tendremos que buscar de modo empírico la función f(x) =? Cuya derivada sea: 2x

La función requerida será $f(x)=x^2$ ya que $\frac{dx^2}{dx} = 2x$

Sin embargo también podremos ver que las funciones: $x^2 -5$, x^2+1, $x^2 + \frac{3}{5}$, $x^2 - \frac{2}{3}$ satisfacen nuestro problema, por lo que es la función: $x^2 + c$ la función pedida donde "c" toma los valores, -5, +1, $+\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{3}$ etc., por lo que el valor "c" es importante tomarlo en cuenta en toda integración indefinida.

Este valor "c" llamado constante de integración nos permitirá encontrar adecuadamente la función primitiva original .Esta constante de integración corrige la falta de precisión ó "ceguera" de nuestra derivada ya que ella no puede distinguir entre las funciones:

x^2-5 $\qquad x^2+1$ $\qquad x^2+\frac{3}{5}$ $\qquad x^2-\frac{2}{3}$

El problema ***1*** podrá escribirse matemáticamente de la siguiente forma: $\int 2x dx = x^2 + c$

Problema 2: Encuentra una función ***f(x)*** sabiendo que su derivada es: 2x+5, es decir: f`(x)=2x+5
Las funciones que satisfacen este problema son muy variadas y tienen una estructura algebraica de fácil identificación: x^2+5x+1, x^2+5x-3, $x^2+5x-\frac{7}{9}$, $x^2+5x+100$ y todas ellas pueden generalizarse como: $\boldsymbol{f(x)= x^2+5x+c}$

Solución: Como puedes observar aparece nuevamente la constante de integración ya que:

$$\frac{d}{dx}(x^2+5x+1) = 2x+5 \qquad \frac{d}{dx}(x^2+5x+100) = 2x+5$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+5x-3) = 2x+5$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+5x-\frac{7}{9}) = 2x+5 \qquad \frac{d}{dx}(x^2+5x+c) = 2x+5$$

De este modo concluimos que: $\int(2x+5)dx = x^2 + 5x + c$

Problema 3: Si la derivada de la función ***f(x)*** es x^2 ¿cuál será la función f(x)?

Analizando los 2 problemas anteriores vemos que el exponente del polinomio resultante era mayor que el de la derivada conocida por lo que nos puede servir recordar que: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

La función buscada deberá tener exponente cúbico en x; sin embargo la función $f(x)=x^3$ tendría una derivada algo diferente a la buscada: $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

Sin embargo la constante 3 que sobra podemos eliminarla dividiendo la función entre 3 y de este modo tendremos que $f(x) = \frac{x^3}{3}$

Si la derivamos tendremos $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}(3x^2) = x^2$

Lo cual nos da la función buscada: $f(x) = \frac{x^3}{3} + c$ considerando también a la constante de integración ya que como en los dos problemas anteriores también existen múltiples funciones que satisfacen dicho problema:

$$\frac{x^3}{3}+5, \frac{x^3}{3}+10, \text{etc.}$$

Actividad 1

A partir de los problemas anteriores encuentra la función cuya derivada sea:

- ***a)*** x^2+5x-3
- ***b)*** 2
- ***c)*** -1
- ***d)*** 0
- ***e)*** $x^4 - x^3 + x - 3$
- ***f)*** $5x^4$

Actividad 2:

A partir de los ejemplos anteriores intenta encontrar una fórmula general para hallar la función: f(x) cuya derivada sea:

- ***a)*** x^n
- ***b)*** ax, siendo a $\neq 0$
- ***c)*** a, siendo a una constante

Si analizas las soluciones anteriores observarás que hemos encontrado las primeras fórmulas de integración:

a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

b) $\int ax dx = \frac{ax^2}{2} + c$

c) $\int a dx = ax + c$

Si aplicamos estas fórmulas será más fácil hallar las ***primitivas en x: f(x),*** cuando conocemos sus derivadas.

Ejemplos:

1. $\frac{d}{dx} f(x) = x^5 \rightarrow \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$

2. $\frac{d}{dx} f(x) = x^4 \rightarrow \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

3. $\frac{d}{dx} f(x) = 2x^4 \rightarrow \int 2x^2 dx = \frac{2x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{2x^5}{5} + c$

4. $\frac{d}{dx} f(x) = 5x \rightarrow \int 5x dx = \frac{5x^2}{2} + c$

5. $\frac{d}{dx} f(x) = -8x \rightarrow \int -8x dx = -\frac{8x^2}{2} + c = -4x^2 + c$

6. $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{3x}{4} \rightarrow \int \frac{3x}{4} dx = \frac{3x^2}{4 \cdot 2} + c = \frac{3x^2}{8} + c$

7. $\frac{d}{dx} f(x) = 5 \rightarrow \int 5 dx = 5x + c$

8. $\frac{d}{dx} f(x) = -2 \rightarrow \int -2 dx = -2x + c$

9. $\frac{d}{dx} f(x) = 5x^3 \rightarrow \int 5x^3 dx = \frac{5x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{5x^4}{4} + c$

10. $\frac{d}{dx} f(x) = -4x^5 \rightarrow \int -4x^5 dx = \frac{-4x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{-4x^6}{6} + c = -\frac{2}{3}x^6 + c$

Si observas los ejercicios: 3, 9,10 observarás que el coeficiente de la variable por ser una constante podemos sacarlo del símbolo integral y hasta después de aplicar la fórmula de la integral de una potencia podemos multiplicarlo sin que el resultado se altere y haciendo más sencillo el procedimiento; esto lo podríamos indicar con la siguiente fórmula: $\int a\, f'(x)dx = a \int f'(x)dx$

"La integral de una constante por el diferencial de una función cualquiera equivale a multiplicar la constante por la integral de la diferencial de la función"

a) $\int \frac{3}{4}x^3 dx = \frac{3}{4} \int x^3 dx = \frac{3}{4} \circ \frac{x^4}{4} + c = \frac{3x^4}{16} + C$

De este modo: **b)** $\int \frac{6x^5}{5} dx = \frac{6}{5} \int x^5 dx = \frac{6}{5} \circ \frac{x^6}{6} + c = \frac{x^6}{5} + c$

Para dejar claro el concepto de primitiva, antiderivada, diferencial é integral observa la siguiente tabla:

Función Primitiva	***Derivada de la función***	***Diferencial de la función***	***Antiderivada ó integral indefinida***
f(x)	f´(x)	f ´(x)dx	$\int$ f ´(x)dx
x^2	2x	2x dx	x^2 + c
5x	5	5 dx	5 x + c
Tan x	Sec^2x	Sec^2x dx	Tan x + c
e^x	e^x	e^x dx	e^x+c
Cos(x+1)	-Sen(x+1)	-Sen(x+1)dx	Cos(x+1)+c
Sen 5x	5cos 5x	5Cos5xdx	Sen 5x+c
Ln $\lvert x^2 \rvert$	$\frac{2}{x}$	$\frac{2dx}{x}$	Ln $/x^2/$+c

Como puedes observar en la última columna se ha obtenido finalmente la ***antiderivada*** que es en realidad la ***primitiva en x,*** más la constante de integración: **C**, presente en toda integración indefinida.

En la tercera columna aparece la diferencial de la función la cual podemos definirla de manera práctica como: ***Diferencial de una función***.

"Es el producto de la derivada de la función por la diferencial de su variable independiente"

d f (x)= f´(x) dx

A partir de este concepto debemos remodelar nuestras fórmulas de derivación y convertirlas en diferenciales.

Por ejemplo, la derivada de la función seno x es coseno x:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x$$

Pero la *diferencial de seno x* es el *producto del coseno x por el diferencial de la variable x*, lo cual escribiremos finalmente: $d\,senx = \cos x dx$

FORMULARIO DE INTEGRACIÓN

Fórmulas básicas

I. $\int dx = x + c$. "La integral del diferencial de la variable independiente es la variable misma"

II. $\int a dx = ax + c$. "La integral de una constante por el diferencial de la variable es la constante por la variable misma"

III. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$. La integral de una sumay/o resta de diferenciales es la suma y/o resta de las integrales de los diferenciales"

IV. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. "La integral de una potencia es el cociente de la potencia de la variable incrementada en uno entre la misma potencia incrementada". Esta regla es válida para n≠1. Esta excepción a la regla se cubre con la fórmula Iva

IVa. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = ln|x \pm a| + c$ y en el caso de que el denominador aparezca como x±a, entonces se emplea la fórmula:

IVb. $\int \frac{dx}{x \pm a} = ln|x \pm a| + c$

V. $\int a f'(x)dx = a \int f'(x)dx$. "La integral de una constante por el diferencial de una función equivale al producto de la constante por la integral". Esta fórmula nos indica de modo práctico que toda constante puede ser removida y sacada de la integral.

A continuación observaremos las siguientes fórmulas diferenciales y así por simple inspección podremos establecer otras integrales necesarias.

a. *d sen u = cos u du*

b. *d cos u = -sen u du*

c. *d tan u =* sec^2 *u du*

d. *d cot u =* $-csc^2$ *u tan u du*

e. *sec u = sec u tan u du*

f. *d csc u = -csc u ctg u du*

g. *d ln* $|u| = \frac{du}{u}$

h. *d ln* $|\sec u| = \frac{1}{\sec u}\cdot \sec u \tan u du = \tan u du$

i. *d ln* $|\csc u| = \frac{1}{\csc u}(\csc u ctg u du) = -ctg u du$

j. *d ln* $|\sec u + \tan u| = \frac{1}{\sec u + \tan u}\cdot(\sec u \tan u + \sec^2 u)du$

Factorizando en : *sec u tan u +* sec^2 *u* *tenemos:* *sec u (tan u + sec u)*

$$\frac{1}{\sec u + \tan u}\circ \sec u(\tan u + \sec u)$$

$\therefore$ d Ln $|\sec u + \tan u|$ = sec u du

k. **d Ln|csc u-ctg u|** $= \frac{1}{\csc u - ctg u}\cdot(-\csc u ctg u - (-\csc^2 u))du$

$$\frac{1}{\csc u - ctg u}\cdot(-\csc u ctg u + \csc^2 u)du$$

Factorizando en : *- csc u ctg u +*csc^2 *u* ***tenemos*** : $\csc u(\csc u - ctg u)$

$$\frac{1}{\csc u - ctg u}\cdot \csc u(\csc u - ctg u)$$

d Ln|csc u-ctg u| = csc u du

En: a) Podemos preguntar: ¿Cual es la función cuyo diferencial es cos u du?

Y responder inmediatamente: sen u, lo que equivale a calcular la integral de cos u du y obtener: sen u.

Así obtenemos la fórmula:

VI. $\int \cos u\,du = senu + c$

En: b) Podemos pasar el signo – al primer miembro y reescribir la fórmula como:

d(-cos u) = sen u du

y así tenemos que:

VII. $\int senu\; du = -\cos u + c$

De éste mismo modo operamos en las siguientes ecuaciones diferenciales restantes obteniendo las fórmulas :

VIII. $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

IX. $\int \csc^2 u du = -ctgu + c$

X. $\int seu \tan u du = \sec u + c$

XI. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$

XII. $\int \frac{du}{u} = Ln\,/\,u\,/ + C$

XIII. $\int \tan u du = \ln / \sec u / + c$

XIV. $\int ctgudu = -\ln|\csc u| + c$

Aplicando la propiedad de los logaritmos : *n ln x = ln x*^{n} tenemos :

$$= Ln\left|\csc u\right|^{-1} + c = Ln\frac{1}{\left|\csc u\right|} + c \quad = Ln\left|senu\right| + c$$

XV. $\int \sec u du = Ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$

XVI. $\int \csc u du = Ln\left|\csc u - ctgu\right| + c$

XVII $\int e^x dx = e^x + c$

De éste modo tenemos ya, un formulario básico para resolver muchas integrales de modo directo.

A continuación emplearemos estas dieciséis fórmulas para resolver problemas diversos de integración inmediata.

Ejemplos:

Calcular: $\int 5dv$

Extrayendo la constante tenemos: $5\int dv$ y como la integral de una diferencial es la variable misma entonces tenemos:

$$5\int dv = 5v + c$$

Calcular: $\int \frac{2dx}{3}$

Si observas, se puede extraer la constante $\frac{2}{3}$ para dejar solamente $\int dx$ cuya solución es x+c y de este modo se simplifica el cálculo de:

$$\int \frac{2dx}{3} = \frac{2}{3}\int dx = \frac{2}{3}x + c$$

Comprobando tenemos: $\frac{d}{dx}(\frac{2}{3}x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{d}{dx}(x) = (\frac{2}{3})(1) = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\frac{2}{3}x) = \frac{2}{3}$ y expresándolo

como diferencial tenemos : $\mathrm{d}(\frac{2}{3}\mathrm{x}) = \frac{2}{3}\mathrm{dx}$; que es el integrando original.

NOTA: Antes de buscar una fórmula adecuada para resolver la integral propuesta debes "limpiar" o simplificar tu integral extrayendo todas las constantes posibles que ***estén multiplicando*** el diferencial.

- ✓ En ciertas ocasiones existen muchas letras involucradas en la integral por lo que no sabemos con certeza si son o no constantes. Un camino seguro para identificar las constantes consiste en saber cuál es el diferencial de la variable; por ejemplo en: $\int \frac{atds}{3b}$
- ✓ Si observas, la diferencial es ***ds***, por lo tanto como no existe en la integral la letra **s** que debería ser la variable, entonces las demás letras: **a, b, t** deberán ser constantes y por lo tanto podrán extraerse haciendo más fácil identificar la fórmula que nos ayudará a integrar: $\int \frac{atds}{3b} = \frac{at}{3b}\int ds = (\frac{at}{3b})\cdot s + c = \frac{ats}{3b} + c$

- ✓ En algunas ocasiones encontraremos que incluso las clásicas variables : x & y encontradas en la mayoría de las integrales pueden llegar a estar como constantes , como lo puedes ver en el siguiente ejemplo: $\int \frac{3xtdw}{5y}$

El diferencial es de la variable w por lo que las demás literales funcionan en este caso como constantes: $= \frac{3xt}{5y} \int dw = \frac{3xt}{5y} \circ w + c \quad = \frac{3\mathrm{xtw}}{5\mathrm{y}} + \mathrm{c}$

En el siguiente ejemplo observamos la misma situación: $\int -3x^2 tdt = -3x^2 \int tdt$

Como ***t*** es la variable, no se puede extraer y como tiene exponente 1, emplearemos la integral de la potencia. $= -3x^2 \int tdt = -3x^2 \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + c \quad = -\frac{3}{2}\mathrm{x}^2\mathrm{t}^2 + \mathrm{c}$

Comprobando: Derivando con respecto a t :

$$\frac{d}{dt}(-\frac{3}{2}x^2t^2) = -\frac{3}{2}x^2 \cdot 2t$$

$$= -3x^2t \quad \therefore d(-\frac{3}{2}x^2t^2) = -3x^2tdt$$

Procedimientos básicos para resolver los problemas de ésta guía.

- ❖ ***Resolución de Integrales Inmediatas***. (Problemas 1 al 30 de la guía) Se consideran integrales inmediatas a las integrales que tienen la misma forma que las fórmulas de integración.

En algunos casos se tienen que hacer algunas modificaciones algebraicas elementales para que su forma sea la misma y así se puedan aplicar las fórmulas de modo directo.

Por ejemplo:

En las siguientes integrales emplearemos las fórmulas:

$$\int dx = x + c$$

$$\int adx = a\int dx = ax + c$$

A continuación notarás que es conveniente localizar alguna constante dentro de la integral y extraerla para resolver el problema de manera más sencilla ya que así podrás identificar más fácilmente la fórmula requerida.

1. $\int 3dx = 3\int dx = 3x + c$

2. $\int \frac{-2dt}{3} = -\frac{2}{3}\int dt = -\frac{2}{3}t + c$

3. $\int \frac{5dy}{3ad} = \frac{5}{3ad}\int dy = \frac{5y}{3ad} + c$

4. $\int \frac{2m^2dz}{5n} = \frac{2m^2}{5n}\int dz = \frac{2m^2z}{5n} + c$

5. $\int 3xdt = 3x\int dt = 3xt + c$

En éste caso el diferencial es: ***dt***, por lo que la variable deberá ser***: t***, pero como no existe en la integral entonces: ***x*** funciona como constante, por lo que se aplica la misma fórmula.

❖ ***Integrales que contienen a la variable y su diferencial***.

En estos casos se emplearán las siguientes fórmulas: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ para n ≠ -1

Para n= -1 : $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

La segunda fórmula cubre la excepción de la primera fórmula y por lo general encontrarás en los formularios de cualquier texto la segunda expresión.

- A continuación aparecen integrales que presentan constantes que enmascaran el uso de estas fórmulas:

1. $\int 5xdx = 5\int xdx = 5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{5}{2}x^2 + c$

2. $\int 3ax^2dx = 3a\int x^2dx = 3a\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 3a\cdot\frac{x^3}{3} + c = ax^3 + c$

3. $\int \frac{2\pi\cdot tx^4dx}{5ab} = \frac{2\pi\cdot t}{5ab}\int x^4dx = \frac{2\pi\cdot t}{5ab}\cdot\frac{x^5}{5} + c = \frac{2\pi\, t\, x^5}{25ab} + c$

- Cuando la variable está en el denominador se puede subir al numerador cambiando el signo a su exponente:

$$\frac{a}{x^n} = ax^{-n} \quad \text{y} \quad \frac{a}{x^{-n}} = ax^n$$

4. $\int \frac{3dw}{w^5} = \int 3w^{-5}dw = 3\cdot\frac{w^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{3}{4w^4} + c$

- Recuerda que en el resultado final los exponentes deben expresarse con signo positivo.

5. $$\int \frac{5dy}{3y^{-2}} = \frac{5}{3}\int y^2 dy = \frac{5}{3}\cdot\frac{y^{2+1}}{2+1} = \frac{5y^3}{9} + c$$

6. $$\int \frac{dx}{5x} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{5}\ln|x| + c$$

7. $$\int \frac{3adt}{4t} = \frac{3a}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{3a}{4}\ln|t| + c$$

8. $$\int 5mny^{-1}dy = 5mn\int \frac{dy}{y} = 5mn\ln|y| + c$$

- Cuando en la integral aparece un radical de la variable entonces debe expresarse como exponente fraccionario para emplear la fórmula:

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{para} \quad n \neq -1$$

9. $$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

10. $$\int 5\sqrt{x^3}dx = 5\int x^{\frac{3}{2}}dx = 5\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = 5\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 2x^{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{x^5} + c$$

11. $$\int \frac{3dz}{5a^2\sqrt[3]{z^2}} = \frac{3}{5a^2}\int \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{5a^2}\int z^{\frac{-2}{3}}dz = \frac{3}{5a^2}\cdot\frac{z^{\frac{-2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5a^2}\cdot\frac{z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{5a^2}\sqrt[3]{z} + c$$

❖ ***Integrales casi inmediatas*** **(**Problemas 31 al 63**)**

Son aquellas en las que el integrando está expresado como una operación señalada ó indicada: ***producto, cociente ò potencia***, por lo que es necesario realizar estas operaciones primero para simplificar el integrando y finalmente emplear algunas de las fórmulas básicas para poder integrar.

Ejemplos:

1. $\int (x-5)(x+3)dx$

Se realiza el producto de los binomios con término común:

$$(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$$

y finalmente podemos integrar :

$$\int (x-5)(x+3)dx = \int (x^2-2x-15)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x + c$$

2. $\int \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$; Primero se realiza la división : $\frac{x^2+3x-1}{x-1} = $

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x-1 & x^2+3x-1 \\ & -x^2+x \\ & 4x-1 \\ & -4x+4 \\ & 3 \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx = \int \left(x+4+\frac{3}{x-1}\right) dx$$

$$= \int xdx + \int 4dx + \int \frac{3}{x-1}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 3\ln|x-1| + c$$

3. $\int (2-x)^2 dx$; Primero se desarrolla el cuadrado del binomio: $(2\text{-}x)^2 = 4\text{-}4x\text{+}x^2$
y finalmente se podrá integrar:

$$\int (2-x)^2 dx = \int (4-4x+x^2)dx = 4\int dx - 4\int xdx + \int x^2dx = 4x - 2x^2 + x^3/3 + c$$

- ***Integración por cambio de variable (Problemas 64 al 114)***

Este método permite resolver integrales que no son inmediatas, es decir aquellas cuya forma es más compleja y no se parece a las formulas básicas antes vistas.
Al cambiar la función original por una variable sencilla se logra darle a la integral original una forma más simple y que se parezca o sea igual a las formulas básicas. Existen infinidad de casos diferentes de integrales que pueden resolverse por éste método por lo que se requiere un conocimiento amplio de las equivalencias algebraicas trigonométricas.

Ejemplo:

$\int \frac{3dx}{3x-5} =$ si se sustituye el denominador por la variable ***u*** tenemos: ***u = 3x – 5*** y la diferencial de la nueva variable será: ***du = 3dx***

Si observas este valor es el mismo numerador de la integral original por lo que:

$\int \frac{3dx}{3x-5} = \int \frac{du}{u}$ cuya estructura matemática es idéntica a la fórmula básica

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

Regresando a la variable original tenemos que: $\int \frac{du}{u}$ = ***ln | 3x – 5 | + c***

En algunos casos al calcular el diferencial de la nueva variable no se obtiene el numerador original por lo que se procede de la siguiente forma:

Ejemplo:

$\int \frac{4xdx}{x^2-5} =$ ***$u = x^2 - 5$; $du = 2xdx$***

Como puedes ver no se obtuvo el numerador original por lo que hay que extraer la constante de la integral:

$4\int \frac{xdx}{x^2-5}$ el nuevo numerador está contenido en el ***du*** por lo que habrá que despejarlo:

du = 2xdx ∴ du/2 =xdx

$$\therefore 4\int \frac{xdx}{x^2-5} = 4\int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{4}{2}\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + c = 2\ln|x^2-5| + c$$

Al integrar por cambio de variable debes tomar en cuenta las siguientes sugerencias:

- Tomar como ***U*** a la expresión que aparezca dentro de un paréntesis elevado a una potencia cualquiera. ***Problemas 64, 65, 84, 101***

- Tomar como ***U*** a la expresión que aparezca dentro de un radical. ***Problemas: 66, 71, 73, 76, 77***
- En algunas formas fraccionarias el denominador completo puede ser ***U. Problemas: 72, 74, 75, 93, 98, 99, 100***

En Funciones Trigonométricas:

- Cuando aparece una sola función puede tomarse al ángulo ó argumento como ***U. Problemas: 69, 78, 79***
- Cuando aparece un producto de dos funciones trigonométricas con potencia unitaria, una de ellas puede ser ***U***. ***Problemas: 67, 68***
- Cuando aparece un producto de dos funciones trigonométricas y una de ellas tiene exponente, se toma a ésta como ***U*** pero sin el exponente: (***Problema 81)*** a excepción de casos como los ***Problemas 83, 85, 87, 96, 97*** ya que: $\sec^2 t\, dt$ es la diferencial de la función: ***tan t***. Del mismo modo: $-\csc^2 5x\, dx$ es el diferencial de ***1/5 cot 5x***; $-2x \csc^2 x^2\, dx$ es el diferencial de $\cot x^2$.

- En muchos casos donde aparece ***tan x*** ó ***cot x*** , también están presentes sus diferenciales en forma directa como : **sec**^{2} ***x dx*** y ***csc***^{2} ***x dx* *: Problemas 83, 85, 87, 96, 97, 98, 99, 100, 101 ó*** indirecta (enmascaradas) por alguna identidad como: $\frac{dx}{\cos^2 x}$, $\frac{dx}{1-sen^2 x}$, $\frac{dx}{sen^2 x}$, $\frac{dx}{1-\cos^2 x}$ por lo que hay que tomar ***tan x*** o ***cot x*** como ***U*** y hacer la transformación trigonométrica necesaria para evidenciar el diferencial de la tangente ó la cotangente. ***Problemas 84, 86***
- En funciones exponenciales se recomienda que ***U*** sea el exponente de **e**: ***Problemas: 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 105, 106, 107, 108, 109, 110*** Y
- Si **"e"** se encuentra en el denominador, se recomienda subirlo al numerador cambiando el signo de su exponente antes de cambiar la variable: ***Problemas: 91, 107, 108***
- En funciones logarítmicas, ***U*** puede ser el logaritmo dado sin exponente y en otros casos ***U*** sería el argumento

ACTIVIDAD FINAL

Resuelve las siguientes integrales inmediatas empleando las reglas y sugerencias mencionadas en esta guía.

1) $\int 5dx =$	11) $\int 5\pi t^3 dt =$	21) $\int \frac{4\pi}{3}\sqrt{y^3}\,dy =$
2) $\int -3x dy =$	12) $\int \frac{2dx}{x^2} =$	22) $\int 7abcdz =$
3) $\int \frac{2ydx}{3} =$	13) $\int 5\pi dt =$	23) $\int \frac{dt}{3\sqrt{t}} =$
4) $\int \frac{-2dx}{3} =$	14) $\int \frac{3ab^2dw}{5} =$	24) $\int \frac{3\,dy}{5\sqrt[3]{y}} =$
5) $\int tdt =$	15) $\int 2a^3xda =$	25) $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{3\sqrt{x^3}} =$
6) $\int 3t^2 dt =$	16) $\int \frac{dx}{x^2} =$	26) $\int \frac{3mndt}{5at} =$
7) $\int 5t^4 dt =$	17) $\int \frac{4adt}{t^3} =$	27) $\int \sqrt{y}\,dy =$

8) $\int \frac{-3dt}{4ab} =$	18) $\int \frac{2abdy}{y} =$	28) $\int \frac{\sqrt{z}}{2} dz =$
9) $\int 5adz =$	19) $\int \sqrt{z}dz =$	29) $\int \frac{dw}{\sqrt{w}} =$
10) $\int 3m^2 ntdt =$	20) $\int \frac{2}{5}\sqrt{w}dw =$	30) $\int \frac{15dt}{2\sqrt{t^3}} =$

31) $\int (x-5)(x+3)dx =$	42) $\int (2t+1)(t-3)dt =$	53) $\int 5\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 dx =$
32) $\int (x+5)(x+3)dx =$	43) $\int (a+4)(2a+3)da =$	54) $\int \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 dx =$
33) $\int (x-5)(x-3)dx =$	44) $\int (7s-2)(s+3)ds =$	55) $\int 9\left(\frac{y}{3}-2\right)^2 dy =$
34) $\int (x+5)(x-3)dx =$	45) $\int (2y+3)(y-3)dy =$	56) $\int (x-3)^3 dx =$
35) $\int (t-5)(t+5)dt =$	46) $\int (3t-5)(t+4)dt =$	57) $\int \left(\frac{t-5}{t-1}\right)dt =$
36) $\int (y+1)(y-1)dy =$	47) $\int (3x-5)(2x+1)dx =$	58) $\int \frac{x-7}{x+4}dx =$
37) $\int (x-10)(x+10)dx =$	48) $\int (8a+3)(4a-5)da =$	59) $\int \frac{y-8}{y+5}dy =$
38) $\int (\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)dy =$	49) $\int (1-2x)(3+x)dx =$	60) $\int \frac{x^2-x+1}{x+1}dx =$
39) $\int \left(\frac{3}{4}+t\right)\left(\frac{3}{4}-t\right)dt =$	50) $\int (5+t)(5-3t)dt =$	61) $\int \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x+1}dx =$
40) $\int (\sqrt{x}+7)(\sqrt{x}-7)dx =$	51) $\int (x-5)^2 dx =$	62) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx =$
41) $\int (3x-5)(2x+1)dx =$	52) $\int (3x+1)^2 dx =$	63) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx =$

64) $\int 5x^2(2x^3-5)^5 dx =$	77) $\int \frac{2t^2 dt}{\sqrt{2-4t^3}} =$	90) $\int xe^{-3x^2} dx =$	103) $\int \frac{Ln\, x\, dx}{x} =$
65) $\int \frac{2dx}{(2x+1)^2} =$	78) $\int sen\, 5y\, dy =$	91) $\int \frac{3dx}{e^{3x}} =$	104) $\int \frac{dx}{x\, Ln^2 x} =$
66) $\int 5t^2 \sqrt{1-t^3}\, dt =$	79) $\int \frac{\cos(5y-1)dy}{5} =$	92) $\int \frac{e^{2\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}} =$	105) $\int \sqrt{e^x}\, dx =$
67) $\int seny \cos y dy =$	80) $\int sen^2 x\, dx = No\ tiene$ $solución\ por\ éste\ método$	93) $\int \frac{x e^{x^2} dx}{7-4e^{x^2}} =$	106) $\int xe^{-6x^2} dx =$
68) $\int \tan t \sec\ t dt =$	81) $\int sen^3 x \cos x\, dx =$	94) $\int e^{\frac{1}{x}} x^{-2} dx =$	107) $\int \frac{3dx}{\sqrt{e^x}} =$
69) $\int 3\cos(3x-1)dx =$	82) $\int \frac{5sen\, 5x\, dx}{\cos^3 5x} =$	95) $\int \frac{4-\sec^2 3x}{\tan 3x} dx =$	108) $\int \frac{3xdx}{e^{x^2}} =$
70) $\int \frac{\cos 3t\, dt}{sen^2 3t} =$	83) $\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx =$	96) $\int x \csc^2 x^2 \cot x^2 dx =$	109) $\int \frac{\sqrt[x]{e}}{x^2} dx =$
71) $\int 5x^4 \sqrt{x^5-1} dx =$	84) $\int \frac{(\tan 3x-5)^2 dx}{\cos^2 3x} =$	97) $\int 3tg^3\, 5x \sec^2 5x dx =$	110) $\int e^{-3x^2} x dx =$
72) $\int \frac{z^3 dz}{1+z^4} =$	85) $\int \cot 5x \csc^2 5x\, dx =$	98) $\int \frac{3\sec^2 2x dx}{tg\, 2x} =$	111) $\int \frac{dx}{e^x+1} =$
73) $\int 3\sqrt{t-5} dt =$	86) $\int \frac{3\csc z\, dz}{5\sec z\, sen^2\, z} =$	99) $\int \frac{\sec^2 x dx}{1+tg\, x} =$	112) $\int \frac{dx}{x \ln x} =$
74) $\int \frac{2dz}{5+2z} =$	87) $\int \sec^2 x \tan x\, dx =$	100) $\int \frac{\sec^2 x dx}{tg^4 x} =$	113) $\int \frac{2}{\ln e^x} dx =$
75) $\int \frac{a^3 da}{5+a^4} =$	88) $\int e^{3x} dx =$	101) $\int \frac{10\sec^2 5x dx}{(5tg\, 5x-10)^2} =$	114) $\int (3x)(4)^{7x^2} dx =$
76) $\int \frac{20x^4 dx}{\sqrt{2a-3x^5}} =$	89) $\int e^{senx} \cos x\, dx =$	102) $\int \frac{7-\cos 3x}{sen^2 3x} dx =$	