# MATEMÁTICAS, CIENCIA Y TECNOLOGÍA: UNA RELACIÓN PROFUNDA Y DURADERA

Por Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

## 1. ESENCIA Y PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS

La Matemática es una disciplina intelectual autónoma, uno de los exponentes más claros del poder creativo de la mente humana. Por otra parte, juega un papel fundamental en la Ciencia moderna, tiene una marcada influencia sobre ella y a su vez se ve influenciada por la ciencia de una manera esencial. Estas son, brevemente presentadas, las dos concepciones que simbolizan las maneras diferentes de ver el gran edificio que es la Matemática actual. Estas opciones se reflejan en las populares denominaciones de Matemática Pura y Aplicada. Pero entonces, ¿es que existen dos matemáticas diferentes? y, si esto es verdad, ¿pueden coexistir pacíficamente e interactuar recíprocamente, o es que viven de hecho separadas e incluso hostiles una a la otra? En el presente artículo intentaremos mostrar que, hoy como ayer, ambas visiones de la matemática son las caras de una misma moneda, que nos parecen a veces tan diferentes, a veces tan semejantes.

### Un arte puro

Una primera dimensión de las matemáticas es en efecto el aspecto puro, la matemática como un arte por derecho propio, un juego que se juega en nuestras mentes. La Matemática es un arte que expresa la belleza en forma de axiomas, teoremas y relaciones lógicas o numéricas y atrae al investigador precisamente por su perfección lógica, siendo uno de los ejemplos más claros y convincentes de la capacidad humana para el razonamiento y el análisis. Ella impone orden y armonía donde solo veamos desorden y caos.

Ésta es la dimensión más próxima al investigador y, como toda forma pura de arte, tiene una fascinación que explica porque los profesionales consagramos una parte enorme y bastante exclusiva de nuestras vidas a ella. Resulta natural que los matemáticos profesionales tiendan a ver su ciencia desde este punto de vista del arte en sí mismo, con sus conceptos, conjeturas, resultados y métodos de prueba, con sus áreas venerables: la aritmética, el álgebra, la geometría y el análisis, y los nuevos retoños: la estadística, el cálculo de probabilidades, la lógica matemática, la computación,... Y estimen sobre todo sus perfectas deducciones lógicas. Grandes sabios han profundizado en esta dirección: Pitágoras ve en los números la clave de la realidad y Platón ve en el mundo de las ideas un mundo de orden más perfecto que el mundo físico cotidiano.

De hecho, pocos matemáticos profesionales han sido totalmente ajenos al sentimiento de que la verdadera Matemática habita más allá, en un mundo ideal, esperando a ser descubierta por el artista. En sus fabulosos 13 libros de Los Elementos, Euclides de Alejandría (325-265 A.C.) estableció a la vez la teoría y las reglas de un juego que sigue sus pautas hoy como hace 22 siglos. Pocos artistas a lo largo de la Historia podrán decir lo mismo sobre la repercusión y perennidad de su obra: las demostraciones de Euclides son aun hoy día \las demostraciones" en los temas por él tratados. Tal es su influencia intelectual que en el siglo XX, los matemáticos asociados bajo el nombre de guerra de Nicolás Bourbaki osaron repetir la histórica gesta con unos actuales ***Elementos de Mathématique***. La matemática es pues un arte autónomo que halla la verdad dentro de sí misma. Recordemos a Carl G. J. Jacobi que sostuvo que la matemática solo existe \para honor del espíritu humano". Claro que de ahí también se deriva una cierta concepción popular, con su halo romántico pero hoy día un tanto descaminada, que ve al matemático como un sabio irremediablemente distraído, con poca o ninguna mente practica.

## Otra visión, otro papel

¿Refleja lo anterior el cuadro completo de la Matemática? En absoluto, la Matemática es eso y mucho más, hay un modo totalmente distinto de verla y de hacerla que queremos presentar. Junto con el método experimental, las matemáticas son la base sobre la que se asienta la Ciencia moderna y, como consecuencia, en ellas se apoya el desarrollo tecnológico de nuestras sociedades. Penetra hoy todos los aspectos de la sociedad contemporánea desde la ingeniería a la información, el mundo de la empresa, la salud, la administración y las finanzas, sin olvidar el movimiento de las disciplinas sociales hacia el estatus de ciencias, que significa en otros términos y con los matices apropiados, el uso combinado en estas disciplinas de los métodos matemáticos y experimentales.

La importancia práctica de las matemáticas en las ciencias es indiscutible, y no está de hecho en discusión pues la mayoría aplastante de los científicos es bien consciente del valor instrumental de unas buenas dosis de matemáticas en la ciencia. Así, una parte cuantitativamente importante de las matemáticas que son enseñadas en las universidades de todo el mundo se consagra a la educación de ingenieros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas y profesionales de otras varias disciplinas.

Sin embargo, creemos que tal aprecio no hace justicia al papel que las matemáticas juegan en la sociedad. Sostenemos que el papel de la Matemática que es aplicada en diversos contextos sociales va más allá de esta descripción, es más esencial. De hecho:

I. Las matemáticas han jugado un papel fundamental en la formulación de la ciencia moderna desde sus comienzos; una teoría científica es una teoría que dispone de un modelo matemático adecuado;
II. Las matemáticas que se pueden aplicar hoy día abarcan todos los campos de la ciencia matemática y no solo ciertos temas especiales; se trata de matemáticas de todos los niveles de dificultad y no solo de resultados y argumentos sencillos;
III. Las ciencias exigen hoy como ayer nuevos resultados de la investigación y plantean nuevas direcciones de estudio a los investigadores. Pero el ritmo de la sociedad contemporánea hace los plazos sustancialmente más cortos y la exigencia más urgente;
IV. Las capacidades del cálculo científico han hecho de la simulación numérica una herramienta indispensable en la comprensión, diseño y control de los procesos industriales.
V. Cuando se habla de la utilidad de las matemáticas para las ciencias se incluye implícitamente en este nombre la técnica y la ingeniería. Pero hoy día los contornos son mucho más amplios y difusos; este es un aspecto de gran importancia en el presente y el futuro de las matemáticas.

En este artículo trataremos de este aspecto en que la Matemática es el idioma en que están escritas las páginas de la ciencia; gracias a ella ha habido un desarrollo del combinado ciencia-tecnología que ha cambiado la vida del ciudadano de las sociedades tecnológicamente avanzadas en los últimos cuatro siglos de una manera más radical que la Revolución Neolítica había hecho en los noventa siglos precedentes, y el cambio ha sido más dramático en las últimas décadas que en siglos enteros anteriores.

Es un hecho bien conocido por los expertos que la práctica diaria de las ciencias físicas y la ingeniería utiliza cantidades enormes de matemática del más alto nivel. Es más, los mismos conceptos con que se formulan sus teorías son esencialmente los conceptos matemáticos. En las últimas décadas hemos presenciado como la tendencia hacia la matematización alcanza a otras disciplinas, como la Economía, particularmente el mercado financiero, ramas de la Química, la Biología y la Medicina, e incluso las ciencias sociales.

Es un hecho comprobado que la maquinaria matemática, sea imponente o no lo sea, se oculta muy a menudo cuidadosamente al público en los manuales o en los escritos de divulgación, como si no existiese, pues se supone que no será bien vista por el lector (o que este no la comprendería). Pero los nuevos tiempos traen cambios saludables: gracias a la simpatía del público por las proezas del cálculo y la informática, las matemáticas subyacentes van saliendo a la luz.

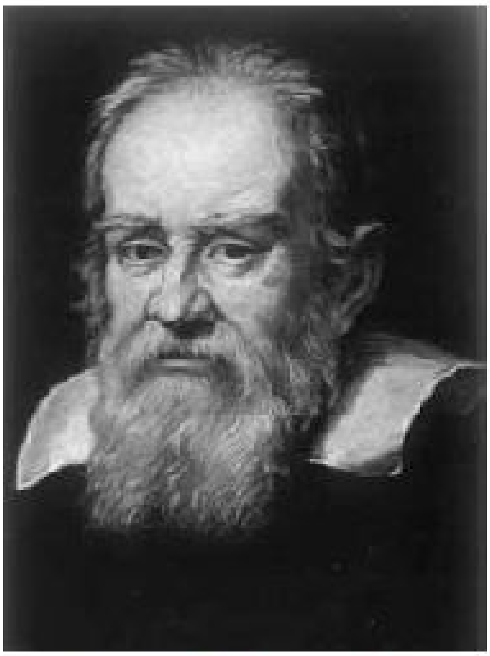
**Repercusión de la Matemática**

En manos del científico, la Matemática debe permitir asimilar los datos y entender los fenómenos. En manos del ingeniero, es la herramienta que hace posible construir un modelo numérico o cualitativo cuyo análisis permitirá tomar decisiones, diseñar artefactos y controlar procesos de manera eficaz y fiable. Esta actividad es lo que, a falta de un nombre mejor, llamamos **Matemática aplicada**. Cubre las áreas clásicas como la Física Matemática y los Métodos Matemáticos para la Ingeniería, pero tiene hoy día contornos más amplios con el advenimiento del cálculo científico y la simulación numérica. La modelización, la simulación computacional y el análisis de datos son herramientas esenciales en la ciencia y la industria modernas. La Matemática aplicada es simplemente la **Matemática de la realidad, es decir, del mundo real, sea lo que sea lo que esta frase significa para cada lector individual.**

Señalemos que hay aun otras visiones complementarias de las matemáticas: su aspecto cultural, su importancia en la enseñanza como vehículo del pensamiento racional, su importancia para comprender el mundo diario (las \matemáticas para el hombre de la calle"), su aspecto de juego intelectual (el reto de resolver un problema). La Matemática es al mismo tiempo la ciencia de lo exacto y el cálculo de lo probable. Es la ciencia del razonamiento abstracto y simbólico. Es, también, hoy día, sinónimo de virtuosismo computacional, de capacidad y efectividad de procesar información, tan importante para el mundo que se gesta. Es el mundo del científico que trabaja con un trozo de papel y hoy, también, el mundo de la modelización, el cálculo y el control de procesos industriales. Todo ello forma también parte del múltiple legado de las matemáticas.

A continuación dirigimos nuestra atención hacia el pasado y presente de la Matemática Aplicada. El lector puede encontrar conveniente saltar en una primera lectura la información contenida en las notas a pie de página. Además, varias formulas famosas y ecuaciones importantes aparecerán aquí y allá en las páginas. ! El propósito no es en absoluto que sean estudiadas como parte del texto es, más bien, recordar al lector iniciado su belleza y relevancia, y al mismo tiempo, dejar claro que no existe ningún camino real (es decir, regio) de acceso a la Matemática: la divulgación tiene sus límites y una comprensión real de los temas aquí perfilados implica un estudio serio. En el capítulo final volveremos a tratar de las opiniones que se debaten y los hechos que sustentan tales opiniones.

## 2. HEREDEROS DE GALILEO Y NEWTON



GALILEO CALILEI

Dos grandes figuras históricas fijaron el futuro papel estelar de las matemáticas en los momentos en que nacía la Ciencia moderna. Galileo lo formuló, Newton lo demostró. No les faltaron precursores. Habría que recordar que en la Historia Antigua, Pitágoras de Samos (569A.C.-475A.C.) sostuvo que todo es número y encontró la maravillosa conexión entre la Música y la Aritmética, mientras Arquímedes de Siracusa unió Geometría y Mecánica en el siglo III a.C. (m. 212 a.C.). Y un siglo antes de Galileo, el genio universal de Leonardo da Vinci intuyó el papel central de la Matemática en la Ciencia. Una pléyade de grandes matemáticos, los héroes de nuestro relato, los siguieron. Se puede decir con Newton que los matemáticos que se ocupan de la aplicación de su arte otean el futuro desde los hombros de gigantes.

Procedamos por partes: es verdad que desde la más remota antigüedad, las matemáticas han estado relacionadas, incluso motivadas, por problemas prácticos. La Aritmética se origina con las actividades de contar y sumar, la Geometría proviene de medir líneas, superficies y cuerpos. Pero también es verdad que la Matemática, como ciencia lógico-deductiva, tal como fue elaborada y nos fue legada por los griegos, de Pitágoras a Euclides, tuvo una base netamente intelectual, digamos ideal, que siempre ha conservado desde entonces y que es parte fundamental de la matemática pura, es decir, de las matemáticas en sí mismas. Este proceso intelectual vive en su propio mundo y no debe nada de su merito o belleza a la posible utilidad o aplicación práctica, no más que un poema, una sinfonía o un cuadro. Un silogismo fácil y demasiado frecuente nos llevaría de aquí a concluir que la autentica matemática vive esencialmente ajena a la aventura de la ciencia y la tecnología. Este silogismo es falso por mucho que haya sido sostenido por no pocos matemáticos, y nos proponemos demostrarlo usando la obra y las opiniones de las grandes ¯guras.

Pues *la historia nos muestra que la simbiosis con la ciencia y la tecnología ha sido fundamental y fructífera y que las matemáticas deben mucho de su ser actual y de sus temas estrella a sus compañeras de aventura. Y viceversa.*

## Los dos pilares

Como es bien sabido, la Ciencia moderna surgió en Europa al final del periodo del Renacimiento. No se basa solo en las matemáticas. El pilar fundamental del edificio en germen fue formulado por el filósofo y político inglés Francis Bacon hacia 1620 y consiste en el método experimental. El objeto preferente de la filosofía se orienta hacia la Naturaleza, que debemos leer y comprender, y eventualmente controlar; la observación es el medio para la comprensión y el experimento es el test de nuestras predicciones. Las ciencias se formaron alrededor de este método, primero la física, luego las demás: biología, geología y química.

Las matemáticas son desde el principio el otro pilar de las ciencias. Fue Galileo Galilei (1564-1642) quien más claramente señalo a principios del siglo XVII ese rumbo para las nacientes ciencias. Suya es la famosa cita tomada de su carta "Il saggiatore" que reproducimos aquí en detalle: ***"La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente está abierto ante nuestros ojos, el Universo, pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender el idioma en que está escrito, a entender sus caracteres. Está escrito en el lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras ¯guras geométricas...".***

Galileo era un claro defensor del método experimental, al que contribuyo con sus famosas observaciones astronómicas y mecánicas. Como hemos dicho, la actitud de Galileo tenía precedentes, siendo los más notables los de Pitágoras y Arquímedes en la Antigüedad y el de Leonardo da Vinci (1452-1519)10 un siglo antes, pero la formulación de Galileo fue decidida y su propuesta fue puesta en práctica, pues sucedió en el contexto histórico adecuado; corroyó las bases del aristotelismo y la escolástica dominantes hasta entonces en el mundo intelectual. Dio fruto en breve tiempo y los científicos nos vemos reflejados en el.

ISAAC NEWTON

De hecho, las filosofías son poca cosa si se quedan en palabras y polémicas, si no son llevadas a término. La gloria del siglo XVII reside en una serie de grandes filósofos-científicos (llamados en aquel entonces filósofos naturales), quienes, sin olvidarse de la metafísica, se lanzaron decididamente en pos del conocimiento de la Naturaleza y de la invención matemática: René Descartes estudio los principios del arte de razonar, así como la mecánica y el universo; ligó la geometría al algebra y escribió El Discurso del Método; Blaise Pascal escribió sus filosóficas cas Pensées pero también investigó los principios de los fluidos (como la presión), la geometría, el cálculo y las probabilidades. Y análogamente hicieron Pierre de Fermat, Edmond Halley, Christiaan Huygens y Gottfried W. Leibniz, un matemático, lógico y filósofo del mayor renombre.

Estamos ya listos para conocer a uno de los caracteres y de los momentos más cruciales en la historia de la ciencia. En efecto, el siglo alcanza su culminación con la figura de Isaac Newton (1642-1727), quien demuestra el éxito indiscutible de la propuesta de Galileo aplicada a la mecánica. Ataca los problemas básicos debatidos durante el siglo y

I. Concluye que el movimiento de cuerpos sólidos sigue una ley matemática simple que relaciona la segunda derivada del espacio (respecto al tiempo) con una entidad invisible pero real, la fuerza. En términos matemáticos, $F=ma$;
II. Al aplicar esta teoría a los cuerpos celestes, concluye que se mueven en sus órbitas de acuerdo con la ley de atracción universal. En fórmulas, $F = Gmm_0=r^2$.

Para estudiar matemáticamente los movimientos resultantes de estas leyes, descubre lo que nosotros llamamos Cálculo Infinitesimal y resuelve las ecuaciones diferenciales. Es más, la formulación misma de sus leyes no es posible sin los nuevos conceptos tomados del Cálculo Diferencial e Integral, que lleva los nombres de Newton y Leibniz, y que fue inventado combinando las intuiciones de la mecánica y de la geometría. En 1687, en que se publica su trabajo monumental, los Principia, la mecánica queda sólidamente fundamentada sobre las mismas bases que tiene hoy día. La matemática no es solo una herramienta indispensable, en realidad es el idioma en que se concibe y expresa la Ciencia, esta es la razón del título del libro. Desde ese momento, la descripción de la dinámica y la evolución de los sistemas mecánicos es una parte esencial de las

matemáticas. Sigue un periodo de enorme desarrollo, durante el cual, la matemática intenta cumplir este nuevo papel fundamental.
Newton es considerado generalmente el científico más influyente en la historia de la humanidad. Permítasenos aportar algunos datos adicionales para entender bien la grandeza de su legado. Podemos anotar a su crédito los fundamentos de la mecánica y la astronomía, del cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales; pero también estudio la naturaleza de la luz, puso los fundamentos a la óptica y contribuyo con notables adelantos técnicos como el telescopio de refracción. Además de todo esto, estudio los fluidos que se llaman hoy día newtonianos, explicó y calculó el funcionamiento de mareas por medio de la atracción lunar, computó la velocidad del sonido (y también se interesó por la teología, la alquimia y la astrología, rasgo bastante común de esos tiempos que no debe extrañarnos en un gran científico). Su prestigio entre sus contemporáneos era enorme y los filósofos más brillantes del siglo XVIII (Hume, Kant, Voltaire) estudiaron su trabajo y creyeron posible extender su fabuloso éxito a todos los campos de la filosofía, tarea que ha resultado ser de una dificultad extrema. De hecho, todavía estamos ocupados en ella.
La inmensidad de la tarea de entender la Naturaleza no escapó a una persona tan penetrante como Newton, con todo su éxito. Una de sus opiniones más famosas dice como sigue: *"I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".*

## 3. EL SIGLO DE LA RAZÓN Y DE LAS LUCES

Durante los tres siglos siguientes, una parte de ese océano se ha visto colmado de verdad, ciencia y matemáticas. La ciencia y la tecnología, bases de la Revolución Industrial, han progresado con las teorías, razonamientos y experimentos. Como consecuencia, la sociedad del siglo XX ha cambiado más radicalmente con respecto al siglo XVII que todo lo que había pasado en varios miles de años antes, desde el inicio de las grandes civilizaciones agrícolas. El confort de la casa, el transporte, y las comunicaciones, la salud del ciudadano actual, descansan sobre bases técnicas completamente desconocidas para las personas del Siglo XVII.
Quienes prefieran contemplar el panorama de las matemáticas actuales, al final del largo camino, son invitados a saltar las próximas 3 secciones y proceder con las matemáticas del siglo XX. Más aún, quienes quieran sólo asomarse al futuro harían bien en avanzar hasta la sección 7. Para quienes se interesan por qué pasó entre tanto, el relato continúa en el comienzo del siglo XVIII. Empezando con el ya citado Leibniz, gran filósofo y rival de Newton en la famosa y un poco triste "disputa del cálculo", una serie de brillantes matemáticos (diríamos mejor físico-matemáticos), como la familia Bernoulli, Euler, D'Alembert,... aprovecharon el potencial del nuevo cálculo y formularon matemáticamente todo tipo de problemas mecánicos: problemas de disparo, problemas sobre la caída de los cuerpos, sobre el movimiento de los fluidos, de vibraciones mecánicas, de minimización,...


LEONHARD EULER

Los métodos infinitesimales son igualmente poderosos en su aplicación a la geometría, una disciplina que vive en simbiosis íntima con la mecánica. Los sabios estudian el Cálculo de Variaciones, un nombre para el cálculo de valores mínimos de los llamados \funcionales" que florecería en el siglo XX como un capítulo ni siquiera previsto. Jean Le Rond D'Alembert estudió la vibración de las cuerdas y escribió la ecuación de ondas que lo llevó a descomponer una función en suma de ondas elementales, tarea también emprendida por Leonhard Euler (1707-1783), quien realizó la descomposición en suma posiblemente infinita de funciones sinusoidales. Euler es quizás el matemático más prolífico de la historia, hizo contribuciones fundamentales a la Geometría, el Análisis y la Teoría de Números, pero también a diferentes ramas de la Mecánica, la Elasticidad, la Hidrodinámica, la Acústica, y hasta la Música. Su latín no es difícil y sus libros de texto pueden leerse hoy con provecho y placer (<preferentemente traducidos). Vivió una gran parte de su vida en San Petesburgo, por lo que se le atribuye la fundación de la matemática rusa, junto con Daniel Bernoulli. El problema de las sumas infinitas preocuparía a los matemáticos en el futuro próximo pero no en estos momentos de descubrimiento y euforia, y menos aún a L. Euler cuya intuición parece no tener límites.

Algunas de las glorias y penas de la matemática como idioma de la mecánica pueden observarse en el estudio de los fluidos. Una teoría sistemática escapó incluso al genio de Newton. De hecho, el aspecto más difícil de esta teoría consiste precisamente en encontrar las hipótesis matemáticas justas que permitan construir un modelo matemático, es decir, matematizarla tal como realmente es. Hacia el año 1738, Johann y Daniel Bernoulli establecen la ciencia teórica de la Hidrodinámica sobre la base idealizada de los llamados fluidos perfectos. El estudio fue continuado por Euler que escribe las famosas ecuaciones (1755) $\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$ (en la notación actual) cuya resolución analítica general ha resistido al paso del tiempo. Es más, D' Alembert puso en evidencia las limitaciones de la idealización implícita en el concepto de fluido perfecto mostrando que un obstáculo sólido sometido a un "viento" perfecto no sufriría ningún arrastre neto y ninguna sustentación neta.

PIERRE S. LAPLACE

Esta dificultad nos devuelve al problema filosófico original, el papel de las matemáticas. De hecho, la dificultad se origina porque la mecánica teórica no trata de la Naturaleza, que escapa en su más pura esencia a nuestra curiosidad, sino que trata más bien del modelo matemático que nosotros nos podemos formar de ella. La concordancia experimental nos permite confirmar que una teoría es buena como modelo del mundo físico, pero nunca que es un modelo perfecto. La modelización matemática es un aspecto fundamental de la matemática actual y clave de su posible utilidad.

A pesar del fracaso relativo con los fluidos, cuando termina el Siglo de las Luces una sensación de optimismo invade las mentes de los mejores matemáticos - mecánicos, como son Joseph Louis Lagrange, autor de la Mecanique analytique, y Pierre Simon Laplace. El último publica su monumental libro Mecanique celeste (1788). Es también autor de la Theorie Analytique des Probabilites (1812), una de las más importantes referencias en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. La ecuación de Laplace, $\Delta\mathbf{u} = 0$, es una de las más famosas de la Física. Basándose en sus estudios mecánicos pensó que el universo funciona como un reloj (determinismo) y declaró que los problemas matemáticos más importantes estaban ya propuestos y resueltos, o a punto de ser resueltos en un corto tiempo. Afortunadamente, la Historia demostraría que el gran hombre erraba en este tema. ¿No recuerda esto algunos recientes y acalorados debates sobre el fin de la Física o de la Historia?

## 4. EL SIGLO XIX, EL GRAN SIGLO DE LA CIENCIA

La contribución del siglo XIX a la Matemática, tanto pura como aplicada, es sorprendente por su novedad, por lo inesperado de su evolución y por su riqueza y amplitud de temas. Empecemos por las matemáticas que vinieron de la física.

JAMES C. MAXWELL

- **La electricidad y el magnetismo** De Michael Faraday a J.C. Maxwell, experimentos y leyes parciales cubren un camino que cuenta con los nombres de Gauss, Ampere, Oersted, Biot, Savart, Lenz,... hasta llegar al (impresionante) sistema de ecuaciones diferenciales en James C. Maxwell derivadas parciales que relaciona los campos eléctricos y magnéticos (1863), obra cumbre de James Clerk Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell (que no detallaremos en este momento por su complejidad, aunque sin duda merecen lugar de honor en este texto) son uno de los logros mayores de la Matemática en el siglo XIX. Gracias a James Maxwell, una nueva rama de la ciencia, cuya existencia era insospechada un siglo antes, alcanzó el nivel de perfección matemática que Newton había otorgado a la mecánica. La teoría electromagnética tendrá profundas repercusiones no sólo sobre las ecuaciones diferenciales y el análisis funcional, sino además sobre la naciente topología (a través de conceptos como la homología). Elaborando las ecuaciones de Maxwell se llega a la ecuación de ondas, que es la herramienta que nos permite describir la propagación de los fenómenos electromagnéticos en forma de ondas, caracterizadas por tres parámetros: primero, la amplitud A; segundo, la velocidad, c, que depende del medio (y es por consiguiente constante en el vacío); tercero, la frecuencia de oscilación w, que es una cantidad que varía con el tipo de onda. En breve, y para una dimensión espacial, la ecuación y su solución se escriben $u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u = A\cos(kx - \omega t + \phi),$ donde u es la intensidad de la oscilación, k=w/c se llama número de onda y $\phi$ es una constante, la fase, de la que no debemos preocuparnos por ahora, y los subíndices indican derivadas parciales. Pero veamos, ¿es tan necesaria esta fórmula para proceder? La respuesta es que sí, pues poco después, y como reflejo de la generalidad del parámetro en el modelo matemático, Heinrich R. Hertz predice y descubre las ondas electromagnéticas fuera del rango visible (las ondas de radio, 1888), y Guglielmo Marconi descubre la telegrafía sin hilos, es decir, la radio (1895), introduciéndonos así al mundo de las comunicaciones que son el alma del siglo XX. Y otra gran sorpresa: aparece una incompatibilidad con la mecánica de Newton sobre la que hablaremos en un momento. Quede dicho esto sobre las consecuencias de la formulación matemática en la evolución de la ciencia.

- **Los fluidos reales** de Claude Louis Navier a George Gabriel Stokes, 1821 a 1856 y después. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen los fluidos reales y gobiernan el comportamiento de los fenómenos atmosféricos (el clima, la Meteorología, la Hidrología, la futura Aeronáutica). La formulación correcta de las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos reales tardó por consiguiente unos 180 años tras los esfuerzos de Newton, las matemáticas profundas no se hacen en dos días. Una serie de brillantes matemáticos figuran entre los modelizadores, como S. Poisson y J. C. Saint Venant, así como el médico J. L. M. Poiseuille, que investigó el flujo sanguíneo. Lord Kelvin y H. Helmholtz ponen las bases para el estudio matemático de la vorticidad y los torbellinos. La comprensión matemática de los fluidos turbulentos, ya mencionados por Leonardo, *es todavía un problema abierto.*

Para no alargar excesivamente nuestro texto mencionaremos sólo dos teorías físicas más de gran importancia y repercusión matemática:

- **La Termodinámica**, que estudia los intercambios de calor, adquiere una fundamentación matemática sólida con James Joule, Saadi Carnot, J. R. Mayer,... Tiene una profunda repercusión sobre el cálculo en derivadas parciales y el concepto de diferencial exacta. Esta teoría incluye la famosa Segunda Ley de la Termodinámica (la ley del crecimiento de la entropía en el Universo), una ley fundamental en la ciencia. Mientras que su declaración matemática es simple, su interpretación prácticatiene implicaciones profundas que ocupan a generación tras generación de estudiosos.
- Por último, mencionemos la **Mecánica Estadística**, asociada a los nombres de Maxwell, L. Boltzmann y W. J. Gibbs, que tallaron toda una rama de la Física Matemática basada en el Cálculo de Probabilidades, rama de las matemáticas que había permanecido un tanto al margen de esta aventura científica. Esta idealización matemática del azar había sido elaborada en el fabuloso siglo XVII (ca. 1650) por B. Pascal, P. Fermat y C. Huygens para comprender los juegos de azar, y avanzada luego por Buffon, Bernoulli, De Moivre y Laplace entre otros. De repente, el concepto de probabilidad cobra vida para la ciencia física a la hora de modelar el comportamiento de cantidades enormes de partículas. Veamos por qué: las partículas están sujetas evidentemente a las leyes de la mecánica de Newton. Pero, dado que hoy se sabe que el número de moléculas de un gas por litro alcanza la fantástica cifra de 2, 69 x$10^{22}$ en condiciones normales (0 ºC de temperatura y 1 atm. De presión), es del todo imposible seguir sus trayectorias individuales. La mecánica estadística propone un comportamiento medio con efectividad sorprendente: de ella es inmediato predecir la relación de la temperatura con la energía y la presión para un gas perfecto, ¡y la predicción ideal resulta ajustada a los datos experimentales! La distribución de Maxwell-Boltzmann, $n = Ae^{-E/kT}$, T es un objeto matemático que tiene en mecánica estadística un papel tan importante como la distribución gaussiana en la ciencia estadística usual.

BERNHARD RIEMANN

Cambiemos de escena para retratar a otro de nuestros héroes, una "vida ejemplar". Bernhard Riemann (1826- 1866) es una de esas figuras sorprendentes cuya obra contiene lo mejor de la matemática pura y aplicada. El gran matemático alemán, muerto

joven, es bien conocido como un gigante de la matemática más pura. Nos legó la hipótesis sobre los ceros de la "función zeta"(Hipótesis de Riemann) cuya demostración es quizá el problema abierto de las matemáticas más famoso al entrar el siglo XXI, tras la reciente resolución de la conjetura de Fermat. La hipótesis de Riemann afirma que las soluciones (o ceros) interesantes de la ecuación ³(s) = 0, están situadas sobre una misma línea recta en el plano complejo, precisamente la de ecuación Re(s) = 1=2. Esto se ha verificado para las primeras 1.500.000.000 soluciones. Una prueba de que el aserto es verdad para toda solución aclararía muchos misterios, desde la distribución de números primos a cuestiones de física teórica. Riemann fue un investigador de mente geométrica que ligó la suerte del análisis complejo a las transformaciones conformes y pensó en los espacios generales de varias dimensiones definidos a partir de su geometría local. Hoy día, llamamos a esas geometrías riemannianas y son la base a partir de la cual se construye la física teórica.
Pues bien, el mismo Riemann estudió la propagación de gases compresibles y llegó a la conclusión de que el modelo matemático, entendido en el sentido de las soluciones clásicas, era contradictorio (porque prevea líneas características que se cortan, y sobre las cuales, las variables físicas - densidad, presión y velocidad - tomarán valores distintos simultáneamente). Sin embargo, aventuró que la teoría era correcta si se cambiaba radicalmente el punto de vista y se admitían como soluciones de una ecuación diferencial funciones que no sean derivables, ni siquiera continuas. Ante tal atrevimiento, tan típico de las mejores matemáticas de los siglos XIX y XX, recordamos de nuevo a Newton: Riemann no se inventaba esa teoría. La teoría de las ondas de choque es hoy día un tema fundamental de la dinámica de gases y de su aplicación a la aeronáutica, y es por ello una de las áreas más activas de investigación matemática en ecuaciones en derivadas parciales y de la ingeniería.

## La Evolución Interna

Pero, incluso tras el elogio de Riemann, esta visión sería totalmente injusta si no tuviera en cuenta la evolución interna de las matemáticas, que habían llegado a un alto nivel de madurez tras 300 años de intenso desarrollo. Solo comentaremos aquí muy brevemente este importante capítulo, pues es más conocido por el público matemático. Varios son los temas estrella, tan inesperados como cargados de futuro: geometrías no euclídeas de J. C. F. Gauss, Janos Bolyai y N. I. Lobachevski, fundamentación del cálculo infinitesimal de Augustin L. de Cauchy, la teoría de funciones de Karl Weierstrass, la lógica matemática de George Boole, la teoría de conjuntos de Georg Cantor, por citar sólo un nombre al lado de cada gran capítulo.
Existen campos de investigación en que las matemáticas toman claramente el relevo a la física en la tarea de extraer el jugo de un concepto. Esto sucede con el problema de representación de una función como una suma de funciones simples, resuelto por Brook Taylor y Colin McLaurin para las sumas de potencias y planteado por Daniel Bernoulli (1753) y Leonardo Euler para las sumas trigonométricas que aparecen en las ecuaciones de ondas y el calor. Es gracias a la insistencia de Joseph Fourier (1822) que los matemáticos se adentran en la aventura de dar un sentido riguroso a las sumas infinitas de funciones trigonométricas generales.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$

CARL F. GAUSS

JOSEPH FOURIER

Este es el origen de un área mayor de la teoría de funciones, conocida como Análisis de Fourier. La tarea estaba cargada de grandes dificultades y tuvo grandes éxitos. Así, cuando Paul du Bois Raymond construyó (1873) una función real continua y periódica cuya serie de Fourier no converge puntualmente, parecía que algo iba realmente mal en el análisis matemático de los fenómenos oscilatorios. Tras cuidadoso examen, tres opciones se planteaban al investigador:

I. Modificar la noción de función,
II. Modificar la definición de convergencia,
III. Reemplazar la base de senos y cosenos por candidatos mejores.

Es mérito notable de la comunidad matemática que los tres caminos hayan sido explorados con éxito asombroso. El teorema fundamental de sumación de series de Fourier se debe a L. Carleson, 196637, y necesita útiles como la convergencia en casi todo punto, los espacios $L^2$ y la maquinaria del análisis del siglo XX.

### El Contexto Social

Es interesante decir dos palabras sobre la evolución social de la ciencia en el siglo XIX. Este es el siglo en que las revoluciones industrial, burguesa y democrática se asientan en Europa trayendo consigo la extensión de los estudios científicos e industriales tanto en universidades como en otros centros especializados, con lo que aumenta exponencialmente el cuerpo de profesores investigadores. Los avances son tan impresionantes que el final de siglo vuelve a encontrar a los matemáticos en franco optimismo, si uno se fía de la historia escrita por el geómetra alemán Felix Klein. Otra característica de este período es la profunda separación que se manifiesta entre matemáticos, físicos e ingenieros, consecuencia del enorme crecimiento de sus campos de estudio. Tal separación, a veces divorcio, tendría consecuencias profundas sobre la evolución de las matemáticas en el siglo XX, e incluso sobre el mismo concepto de matemática.

## 5. UN CAMBIO DE SIGLO REVUELTO

En todo caso, el cambio de siglo es espectacular tanto en física como en matemáticas. En estas aparecen en el firmamento figuras extraordinarias como Henri Poincaré (1854-1912) y David Hilbert (1862-1943), que marcarán profundamente las matemáticas del siglo XX. Pero una gran parte del brillo en retrospectiva se debe a que el cambio de siglo fue una época de crisis, pues las evidencias de fenómenos fuera del gran esquema se acumulaban.

- El experimento de Michelson-Morley (1887) prueba que la velocidad de la luz es efectivamente constante (independientemente del sistema de referencia inercial), como predecía la teoría ondulatoria basada en las ecuaciones de Maxwell. El modelo mecánico del mundo de Euclides-Newton tiene por primera vez una gran grieta.
- La observación de las partículas suspendidas en los gases revela un movimiento altamente irregular, el movimiento browniano (Robert Brown, 1827). Este es un golpe para la geometría de Euclides basada en puntos, rectas y curvas regulares (al menos regulares a trozos).
- Las sorpresas de la teoría de funciones llevan a la teoría de conjuntos (Georg Cantor), que junto con la lógica (George Boole, Gottlob Frege, Giuseppe Peano) son la base de un intento de fundamentar las matemáticas rigurosamente de una vez por todas. Las matemáticas proponen a la ciencia los conceptos de teoría coherente y completa. Surgen las escuelas y las disputas: logicismo (Alfred N. Whitehead y Bertrand Russell), intuicionismo (Luitzen Brouwer) y formalismo (David Hilbert). Las paradojas (de Russell, de Burali-Forti, de Richard) siembran un caos notable en los espíritus menos fuertes.

HENRI POINCARÉ

DAVID HILBERT

- No existen útiles analíticos ni computacionales para abordar las complejidades de las ecuaciones de los medios continuos, como los fluidos. En consecuencia, las matemáticas prácticas de la ingeniería se sumen en una serie de aproximaciones y recetas que las divorcian de la teoría.
- Pero, incluso, el tema clásico de la integración general de las ecuaciones del movimiento para tres o más cuerpos celestes se muestra imposible. A grandes males, grandes remedios: H. Poicaré propone los métodos cualitativos y abre las puertas a la geometría algebraica y la topología (llamada entonces Analysis Situs, 1895). Pero al tiempo, descubre con sus métodos teóricos una tremenda complejidad escondida en el modelo matemático (que son los sistemas dinámicos). Uno de estos monstruos son las órbitas homoclínicas que sembrarán de caos la mecánica celeste cuando Poicaré sea bien comprendido (lo que llevó bastantes décadas). Para mejor medir la estatura de nuestro héroe valga la siguiente cita: *"en sus cursos en la Facultad de Ciencias de París desde 1881, y de la Sorbona desde 1886 Poicaré cambiaba de tema cada año, tocando la óptica, la electricidad, la astronomía, el equilibrio de los fluidos, la termodinámica, la luz y la probabilidad".*

- Agreguemos algunas notas más optimistas. Así, la teoría de la integración de funciones se ve coronada por los trabajos de E. Borel y H. Lebesgue. En adelante el cálculo posee un concepto de integral (la integral de Lebesgue) donde el proceso de tomar límite es natural, el análisis funcional puede crecer (espacios de Hilbert) y el famoso problema de Dirichlet tiene solución (en un sentido aún visto como raro). El precio a pagar es la construcción de una teoría matemática sofisticada que los estudiantes de ciencias e ingeniería deben estudiar y absorber, o al menos han de aprender a convivir con ella.
- Descubrimientos importantes de naturaleza matemática ocurren en otras ciencias y darán fruto en el próximo siglo. El Científico ruso Dmitri Mendeleyev encontró el orden en el caos de los elementos químicos y propuso la Tabla Periódica en 1869, que es hoy día la base del tratamiento físico-matemático de la Química. Por otro lado, el monje, botánico y experimentador de las plantas austriaco, Gregor J. Mendel formuló las leyes racionales de la herencia, poniendo así los fundamentos matemáticos de la ciencia de la Genética.

## 6. EL SIGLO XX, UN SIGLO DE MARAVILLAS

A estas alturas, esperamos haber comunicado al lector la impresión de la profunda simbiosis de la Matemática con la Física, de sus sorprendentes y en muchos casos inesperadas interacciones. La historia de tal simbiosis incluye ya aplicaciones tecnológicas avanzadas, preludio de lo que será el nuevo siglo. La explosión de la Matemática y la Ciencia en el siglo XX hace aconsejable reducir nuestro texto a algunos de los temas más importantes. Un rasgo sobresaliente es la matematización progresiva de las demás ciencias, que aparecen ya como nuevos horizontes para la Matemática Aplicada.

### Nuevas matemáticas que nos llegaron de la Física

El comienzo del siglo XX es testigo de dos grandes revoluciones en la manera de concebir el mundo físico, que cambiaron de forma radical el “universo newtoniano". Comprobado el hecho de que la luz no se comporta como era esperado, la teoría que lo explica trae consigo consecuencias dramáticas sobre nuestro concepto de espacio-tiempo, que afectan en la práctica a la Astronomía y al comportamiento de las partículas que se mueven deprisa. Por otra parte, en el extremo de lo muy pequeño, se observó que los átomos, moléculas y partículas subatómicas tampoco obedecen a las leyes de comportamiento tan cuidadosamente observadas por los entes macroscópicos, aunque por otras razones. Son dos grandes revoluciones cuya más íntima esencia se expresa en fórmulas matemáticas. Examinemos con algún detalle el surgir de ambas teorías.

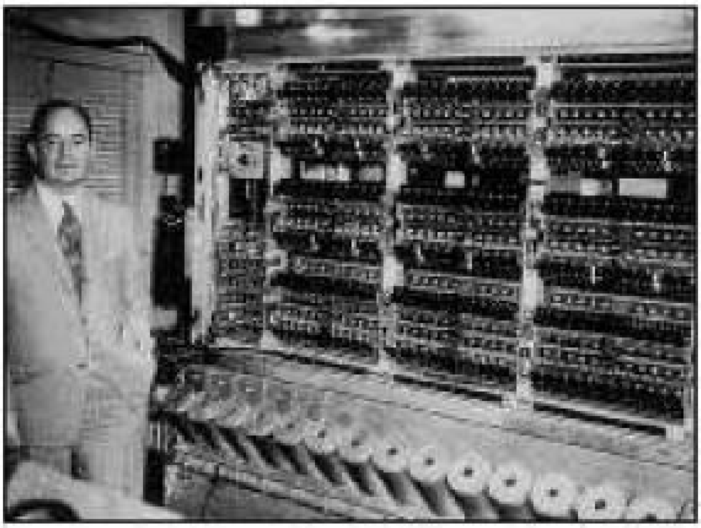
- **La Teoría de la Relatividad**. Albert Einstein, el Hombre del Siglo según la revista Time (año 2000), propuso las dos versiones de la relatividad: en 1905 (la relatividad especial) y en 1916 (la relatividad general). Esperamos no sorprender al lector al afirmar que en ambos casos se trata de una profunda reflexión sobre las matemáticas que sirven de base a la Física.
  La relatividad especial tiene como precursores a Lorentz, Poicaré y Minkowski, que estudiaron el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del espacio-tiempo. La relatividad general usa los conceptos geométricos que Riemann elaboró más de un siglo antes como un puro Gedankenexperiment, es decir, experimento mental, sobre las "hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría", y que fue desarrollado por la escuela de geometría diferencial italiana de Ricci, Levi-Civita y Bianchi. La relatividad será un gran campo de juego de la geometría diferencial en el siglo XX. De las ecuaciones de Einstein se llegará al Big Bang y a los agujeros negros (Oppenheimer y Snyder, 1939; Penrose y Hawking). Todo un ejercicio de matemática pura como modelo de una rama de la física.
  Conviene, sin embargo, no olvidar la otra cara de la Relatividad: desde la primera confirmación experimental de Lord A. Eddington en 1919, incesantes experimentos han servido para confirmar (mejor diríamos, con la modestia de Einstein, no refutar) la teoría de la Relatividad. Pues en la ciencia real no se inventan las hipótesis.
  Hagamos una pausa para echar una mirada a algunas de las

ALBERT EINSTEIN

fórmulas principales. En septiembre de 1905, Einstein publicó un corto artículo en que demostró la fórmula fundamental $E = mc^2$ sobre la equivalencia matemática de masa y energía, que se ha convertido en un clásico de la cultura popular del siglo XX. Por otro lado, las leyes de transformación de la Relatividad Especial, que reemplazan a las leyes de transformación galileanas a velocidades relativas altas, conocidas como las leyes de transformación de Lorentz, son: $x = \gamma x' + \gamma v t', \qquad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2}\gamma x'$, donde la constante ° se llama factor de dilatación del tiempo. Depende de la velocidad relativa v y viene dado por la expresión: $\gamma = 1/\sqrt{1 \quad (v^2/c^2)}$. Por consiguiente, la suma de velocidades sigue la sorprendente regla $u = \frac{u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}$," muy en contra de lo que estamos acostumbrados a creer (es decir, u= $u' + v$"

La fórmula más conocida de Einstein es sin duda $E = mc^2$, que forma con la fórmula cuántica de Planck, $E = h\nu$, toda una nueva visión de la energía al principio del siglo. La energía había sido uno de los conceptos clave de la evolución de la física y las matemáticas que la acompañan en el siglo XIX, y se ve sometida a profunda revisión matemática en los comienzos del siglo XX. Precisamente, los quanta (o cuantos) son nuestro próximo tema.

- **La Mecánica Cuántica** describe el comportamiento de la materia y la luz a la escala atómica. En palabras del gran físico R. Feynman, "Things on the very small scale behave like nothing you have any direct experience about". En particular, asistimos a otra enorme brecha en el, hasta entonces, perfecto edificio de la mecánica newtoniana. El segundo recorrido mágico del comienzo del siglo XX nos lleva de la hipótesis de los quanta de Max Planck, 1900, a la ecuación de SchrÄodinger (1926) pasando por N. Bohr, L. De Broglie, W. Heisenberg y P. A. M. Dirac. El acceso al mundo atómico queda codificado en la maravillosa ecuación $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,y,z,t)\psi,$ donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, $\Delta$ es el operador laplaciano y $V = V(x,y,z,t)$ es el potencial. Todo ello parece realmente un trozo de la Cábala, y en el momento inicial se dudaba de qué representaba exactamente la variable $\psi(x,y,z,t)$ llamada "función de onda". Tal es el poder de la Matemática, estos físicos geniales habían encontrado un trozo del Código Matemático del Universo pero aún habían de interpretar qué significaban las variables. En 1928, Max Born propuso la interpretación probabilista, donde $|\psi(x,t)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el lugar x en el instante t, y aunque es mayoritariamente admitida, hay quienes se resistieron, siguiendo a Einstein en eso. Porque la Mecánica Cuántica es un desafío fundamental a la manera previamente admitida de mirar el mundo, al determinismo tradicional y a la causalidad. Se puede decir que el determinismo está basado en el supuesto de que "el conocimiento exacto del presente permite calcular el futuro". ¿No es ese el sueño de las ciencias exactas, y no es cierto que la Mecánica Cuántica subvierte esa creencia? Ponderando el problema, W. Heisenberg encontró en 1927 la respuesta siguiente: *"no es la conclusión [de la hipótesis determinista] lo que es falso, sino la hipótesis inicial".*



J. V. NEUMANN

Dejando al lado el mundo de las interpretaciones, debemos informar que esta teoría, aun estando basada en el más alto nivel de abstracción matemática, es confirmada por todo un siglo de experimentos. La parte mágica, que tanto abunda, tiene un momento estelar cuando Dirac, usando la formulación relativista, propone la existencia de los positrones (1932) porque "las ecuaciones admiten el cambio de signo con respecto a la solución que describe el electrón",. . . y el positrón fue debidamente descubierto por los físicos experimentales poco después (Anderson y Blacket, 1932-33). Dirac predijo la existencia del antiprotón que fue confirmado por Segrµe en 1955, y también el monopolo magnético, pero esta vez su existencia ha quedado sin confirmación hasta el momento presente. Las predicciones de Dirac son un ejemplo notable, de ninguna manera única, en que el modelo matemático va delante de la evidencia

experimental. ¿No nos recuerda todo esto a Hertz?
La cosecha matemática de la Mecánica Cuántica no es escasa: la teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert con su correspondiente teoría espectral son desarrolladas por John von Neumann (Janos v. N., 1903-1957), uno de los genios más polifacéticos del siglo, con el objeto de dar sentido a los operadores que aparecen en la ecuación, operadores laplacianos y demás. Su teoría se basa en el trabajo precursor de S. Banach y los expertos italianos en cálculo de variaciones, pero la Mecánica Cuántica tiene sus caprichos: necesita unos objetos de la segunda generación, los \operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert". Estamos, pues, en el borde o más allá de los temas de la licenciatura en Matemáticas, lo cual es información interesante para quienes sostenían que toda matemática útil ha de ser muy fácil. Junto con el Cálculo de Variaciones, la Mecánica Cuántica ha sido cantera inagotable de problemas para el Análisis Funcional, rama de las matemáticas que toma vuelo propio.
Por otra parte, el comportamiento anómalo de las partículas cuánticas respecto a las clásicas tiene aspectos matemáticos simples y relevantes, como su distinto comportamiento estadístico, que lleva a las distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac que “corrigen" a Maxwell-Boltzmann.

## Las matemáticas que vinieron de la ingeniería

- **La Aeronáutica**. Tras los impresionantes avances de la física matemática del siglo XIX y en particular de la mecánica de fluidos, pudiera parecer que un problema antiguo como el del vuelo, que ya había ocupado a Leonardo da Vinci, debería estar resuelto. Y los experimentos con globos habían tenido éxito un siglo antes. Además, la teoría de la variable compleja y de los lujos potenciales y vorticosos había obtenido un notable progreso. Pero con todo este progreso, el vuelo propulsado (por un motor) no era entendido ni practicado, y un desanimado Lord Kelvin reconocía a finales de siglo XIX que el sueño del vuelo propulsado era quizá imposible. Es entonces cuando el método experimental es reivindicado por los hermanos Wilbur y Orville Wright, fabricantes de bicicletas y consumados experimentadores, que logran volar en un artefacto propulsado en las inhóspitas playas de Kitty Hawk, Carolina del Norte, en la desapacible mañana del 17 de diciembre de 1903. Es el nacimiento de la Aeronáutica. La reacción de los teóricos fue fulminante y a la altura del desafío. Durante el periodo 1905-10, los principales ingredientes matemáticos que faltaban al modelo teórico fueron comprendidos (N. E. Zhukovski, M. Kutta, L. Prandtl, S. A. Chaplygin). Se trata de los conceptos de sustentación, circulación, capa límite, separación, régimen laminar y turbulento. Una ingeniería nace y nos llevara en 30 años más allá de la barrera del sonido. Y nacen ramas de la matemática aplicada, como la teoría de las perturbaciones singulares, la teoría de los flujos supersónicos y transónicos y la teoría matemática de la combustión.

Resistimos aquí la tentación de detallar las otras ramas de la ingeniería que también han tenido una interacción activa con las matemáticas. Lo cual no significa en absoluto que ignoremos su importancia, trataremos el tema en la sección 8.

## Grandes novedades que vinieron de las matemáticas

Las matemáticas han vivido el siglo XX muy pendiente del desarrollo interno de las ideas recibidas del fabuloso siglo anterior. Para más fortuna, el siempre difícil y en general fallido intento de prever las líneas del futuro contó con una confirmación en la famosa propuesta de D. Hilbert al II Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París. En 23 problemas, Hilbert resumía los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas, desde las más puras a la física matemática. Esos 23 problemas han sido de gran importancia en el transcurso de los años, pero otras líneas inesperadas han venido a complementarlos y competir por las candilejas. Señalemos tres desarrollos importantes entre tantos.

- **El cálculo de probabilidades**. Como respondiendo a la necesidad planteada por la mecánica cuántica, pero en realidad independientemente, Andrei N. Kolmogorov estableció en Moscú la probabilidad axiomática sobre la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, tarea a la que se asocian los nombres de P. Levy en Francia y N. Wiener en EE.UU. Hemos de recordar aquí que Boltzmann fue un estudioso del movimiento browniano, que L. Bachelier escribió su tesis en Paris en 1900 en un intento (infructuoso de momento) de modelar los mercados financieros, y que Einstein recibió el premio Nobel en 1921 no por la teoría que le hizo famoso sino por sus estudios del efecto fotoeléctrico y... del movimiento browniano. Las cadenas de Markov habían sido estudiadas desde 1900 por A. A. Markov.
  Hoy día, la teoría de los procesos estocásticos, en particular los procesos de Markov, es una de las áreas predilectas de esta floreciente rama de las matemáticas, y el Cálculo de It[1]o es una herramienta esencial del análisis estocástico continuo que compite con el cálculo infinitesimal clásico de Newton y Leibniz. Todo este desarrollo era completamente desconocido, incluso insospechado, hace poco más de un siglo y se ocupa de informarnos sobre los fenómenos aleatorios y su evolución probable, es decir, nos permiten hacer predicciones sobre lo no exacto. Como es ya usual en

nuestro relato, se trata de un empeño no sólo académico, sino que tiene aplicaciones muy importantes en los procesos científicos, industriales y financieros.

- El caos determinista. El estudio del caos generado por las ecuaciones diferenciales, ya anunciado por Poincaré, cuyas matemáticas habían madurado gracias al impulso de diversos matemáticos, especialmente G. Birkhof, ha de esperar a la obra de un físico dedicado a los estudios del clima para adquirir el impulso definitivo. En efecto, se atribuye a Edward Lorentz, del MIT, ese mérito. Preocupado por el estudio de los procesos convectivos en la atmósfera propone un simple modelo no lineal consistente en 3 ecuaciones diferenciales ordinarias que no me resisto a copiar

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz \\ z' \quad \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Para esta elección de los parámetros (es decir, los coeficientes de la ecuación, que pueden ir variando en el problema) encuentra sorprendido que las trayectorias numéricas que produce su ordenador no convergen a ninguna situación periódica. El artículo de 12 páginas data de 1963. Surgen conceptos que llegarán al gran público, como caos determinista y atractores extraños, y toda una rama de las matemáticas tanto teóricas como experimentales, una gran novedad posible gracias al desarrollo de los ordenadores. Autores como S. Smale y M. Feigenbaum se hacen célebres. Entran en escena los conjuntos fractales de B. Mandelbrot, ya anunciados en la obra de G. Julia en los años 2063. Hurgando en la historia se descubre como precursor la figura gigante de H. Poincaré que había previsto este caos en su cabeza.

El estudio de los procesos caóticos, fractales y turbulentos es una de las fronteras del pensamiento matemático actual.

- **Nuevos conceptos de solución en las ecuaciones diferenciales**. Hacia los años 30 era claro para muchos investigadores que el concepto clásico de solución era insuficiente para construir una teoría de las ecuaciones diferenciales que satisfaga las necesidades de las ciencias a las que se aplican. En efecto, es natural en esta disciplina plantear problemas, es decir, conjuntos de ecuaciones y datos adicionales, que sean bien propuestos; siguiendo a J. Hadamard, ello quiere decir que tales problemas han de tener una solución, que esta ha de ser única si se dan datos suficientes, y que además tal solución ha de depender continuamente de los datos. No se trata ya de que la solución sea clásica, pues ésta puede no existir o puede que no sea el concepto de solución cuya existencia resulta natural demostrar.
  Enfrentados con este reto, los matemáticos han desarrollado diversas nociones de soluciones generalizadas con significado físico. Quizá el ejemplo más notable haya sido el problema de minimización de energía de Dirichlet ya mencionado, motivación de los espacios de Hilbert.
  Otro ejemplo básico es el problema de Riemann de la dinámica de gases, ya mencionado. Un tercer problema similar lo afronta J. Leray en 1933 en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos reales (viscosos) en el espacio tridimensional. Gracias al trabajo de los analistas funcionales (S. L. Sóbolev, L. Schwartz,...) se introducen los conceptos de solución débil y solución en el sentido de las distribuciones. Resumiendo mucho, no se pide a las soluciones que posean todas las derivadas implícitas en la ecuación sino que cumplan con ciertos tests. Con los expertos en leyes de conservación (P. Lax, O. A. Oleinik, S. N. Kruzhkov) se llega a las soluciones de entropía, que no son siquiera continúas (y se recupera así el legado de Riemann, Rankine y Hugoniot y sus ondas de choque).
  En nuestros días aparecen nuevos conceptos de solución para satisfacer las crecientes necesidades, como las soluciones viscosas de M. G. Crandall, L. C. Evans y P. L. Lions. L. Caffarelli extiende este concepto a los problemas de cambio de fase o frontera libre, donde la discontinuidad es parte fundamental del planteamiento matemático. Y la saga continua con las soluciones mild, soluciones de semigrupos, soluciones renormalizadas,...

Uno de los aspectos más llamativos de estos nuevos conceptos es su compatibilidad con las soluciones numéricas propias de los métodos discretos del cálculo numérico. Se halla así una sorprendente alianza de los conceptos abstractos y los numéricos contra \la rigidez de los clásicos". Por otra parte, el Análisis Funcional pasa a formar parte del currículo básico del matemático aplicado y el ingeniero.

## Las matemáticas y la vida social: La teoría de juegos

La teoría de juegos analiza los \juegos", es decir, situaciones en que se da un conflicto de intereses. Parte de los juegos más simples, pasatiempos que pueden ser analizados completamente; de ellos se pasa a los \juegos reales" como el póker o el ajedrez, y de ahí a los complejos problemas de estrategias en áreas de enorme interés social como la economía o la política. Vemos en ello un gran paralelismo con el proceder del cálculo de probabilidades y la estadística, que pasan de los juegos de azar con cartas o bolas a la estadística industrial y social por un lado, y al comportamiento de los gases o los átomos por otro.

El primer teorema en teoría de juegos es atribuido a E. Zermelo, fundador de la versión de la teoría de conjuntos ZF hoy tomada por estándar, y se titula \Sobre una utilización de la teoría de conjuntos en la teoría del ajedrez", 1913. Yendo hacia atrás en el tiempo, el primer libro de las matemáticas de la competición parece ser de Augustin Cournot en 183867. Otro conocido matemático, E. Borel, escribió sobre juegos de estrategia en el período 1921-27 y dio una prueba restringida del teorema del minimax, uno de los resultados más importantes de la matemática aplicada del siglo XX al decir de Casti.
Pero son dos grandes figuras quienes asientan las matemáticas de la competición en el siglo XX. Uno es J. von Neumann, que demuestra en 1928 el teorema del minimax y analiza en su famoso libro con Morgenstern, 1944, los juegos cooperativos y de suma cero. El otro es J.F. Nash que en cuatro artículos fundamentales de 1950-53 establece la teoría de los juegos no cooperativos. Los conceptos de equilibrio dominante y equilibrio de Nash son hoy día herramientas matemáticas básicas de la práctica económica y política (en sus diversas vertientes de elección social) y deberían ser mejor conocidos por el gran público. J. Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 y es uno de los pocos Premios Nobel Matemáticos, junto con los economistas J. Tinbergen, L. Kantorovich y Selten.
La Economía Matemática desborda evidentemente el tema de los juegos, la competición y las estrategias, que forman el reino de las matemáticas de la llamada Microeconomía. Después hablaremos brevemente de las matemáticas del mercado financiero. En la Teoría de la Elección Social es importante el Teorema de Imposibilidad de Arrow, que pone un límite a las capacidades de los sistemas axiomáticos de elección, aplicando a la ciencia social las ideas de los célebres resultados de indecibilidad e incompletitud de Kurt GÄodel (1931) para la aritmética formal, uno de los resultados más notables de la Matemática del siglo XX. El resultado de GÄodel trata de la indecidibilidad intrínseca a todos los sistemas formales que incluyan la aritmética, tema de Lógica y Fundamentos de la Matemática de apariencia eminentemente pura y por ello de nula interacción con el mundo práctico si hemos de creer a los fervientes defensores del aislamiento esencial de las matemáticas puras. Pues bien, volveremos a hablar de él en el próximo tema, que trata de ordenadores, de la mano de otro de nuestros héroes.

## 7. INGENIERÍA Y MATEMÁTICAS EN LA ÚLTIMA REVOLUCIÓN DEL SIGLO. LOS ORDENADORES Y LA MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

La realización práctica del viejo sueño de construir una máquina de calcular toma cuerpo en forma del moderno ordenador que acredita dos orígenes, la Tecnología y las Matemáticas, los cuales confluyen en un fantástico invento en el año 1946. Por una parte tenemos el viejo proyecto de la máquina de calcular, pensada ya en el siglo XVII por B. Pascal y G. Leibniz, y que debe tanto a Ch. Babbage a principios del siglo XIX, proyecto que es realizable en el siglo XX de forma eficiente gracias al avance de la electrónica: primero el tubo de vacío y luego una espectacular saga de progresos técnicos que nos llevan al semiconductor, a la miniaturización y al chip.
Pero el ordenador o computadora no nace como máquina de calcular pasiva, sino que nace con un programa. Esta es la herencia de la lógica matemática, desde G. Boole con su álgebra al programa de formalización de las matemáticas de D. Hilbert, que lleva a la prueba de indecibilidad e incompletitud de Kurt GÄodel en 1931 que destruye el sueño de Hilbert de una matemática de demostraciones automáticas. Ello provoca el interés de otro matemático genial, Alan Turing (1912-1954), que traduce el programa de formalización al lenguaje de las máquinas, 193781, e inventa con Alonzo Church la teoría de la computabilidad, años antes de que el ordenador viera la luz.
Sigue un momento histórico: el esfuerzo de guerra, el desciframiento del código alemán Enigma, : : : Entra en escena von Neumann con la idea del programa en memoria, y se construye el ENIAC en 1946.
La computadora moderna surge como una máquina calculadora eficaz con cuatro características: es de utilidad general, electrónica, digital y programable; las dos últimas propiedades se relacionan directamente con las matemáticas. La primera computadora comercial, UNIVAC, funcionó en 1951. En estos 50 años se pasa de las grandes máquinas (armatostes) que manejan kilobytes o megabytes a los ordenadores personales con capacidad de decenas de Gigas y a la WWW. La dualidad en el mundo del ordenador continúa en forma de la famosa pareja Hardware y Software.

A. TURING

**El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas**

El mundo del ordenador está cambiando poco a poco la vida diaria del ciudadano: las transacciones bancarias, el correo electrónico, la reserva de pasajes, ... Su efecto sobre las matemáticas, menos conocido por el gran público, es aún más dramático. Aparecen por un lado, las nuevas ramas de la Matemática Computacional teórica, como la teoría de la computabilidad y la complejidad y la teoría de autómatas y lenguajes formales. Pero todas las ramas de la matemática pura y aplicada se contagian de la repentina capacidad para calcular efectivamente lo que antes era sólo imaginable, y este nuevo gusto se propaga como una infección (potente pero benigna) en la práctica cotidiana de las matemáticas: matemáticos, científicos e ingenieros calculan órbitas de satélites o trayectorias de sistemas dinámicos, distribuciones numéricas o series temporales de procesos reales, mapas climatológicos o estudios de singularidades, distribución de temperaturas en un alto horno o propiedades estadísticas de los ceros de la función Zeta de Riemann,... Y las finanzas y la administración también calculan.

Entre los notables cambios acaecidos, las matemáticas tienen un papel importante en los procesos industriales u otros en que se combina la experimentación en laboratorio con las nuevas herramientas matemáticas: aparece la combinación de **modelización matemática - análisis matemático - simulación numérica y visualización - control**, que forma una herramienta de uso habitual en los más diversos campos: las comunicaciones, la predicción del tiempo, la astrofísica, la ingeniería minera, industrial, la industria del automóvil y del petróleo, los problemas medioambientales y la ecología, la economía y las finanzas, las comunicaciones, y en este momento, la biología y la medicina, como veremos con algún detalle en la sección 8. Esta área de las matemáticas tiene como tarea aproximar de una manera eficaz las soluciones de modelos matemáticamente muy sofisticados y complejos. El interés por su desarrollo y aplicación da lugar a los grandes Institutos y Centros de Cálculo.

Los nuevos conceptos: modelo numérico, simulación numérica, experimento o exploración numérica, visualización dinámica,... se hacen de uso diario en el medio científico e industrial. El desarrollo de métodos de formulación numérica de los modelos continuos, como las ecuaciones diferenciales, es una rama fundamental de la matemática computacional (a saber, los métodos de diferencias finitas, y elementos finitos, los volúmenes finitos,...). El estudio de las propiedades y la convergencia de estos métodos constituyen el Análisis Numérico, que tiene una conexión profunda con el Álgebra. Por otra parte, la capacidad de cálculo da nueva vida a la matemática discreta, como la teoría de grafos, con sus importantes aplicaciones (por ejemplo, a las redes telefónicas y en general al mundo de las comunicaciones).

**Un nuevo paradigma de la ciencia**

El broche final de esta evolución vertiginosa es el surgimiento de un nuevo paradigma científico en que la Ciencia computacional es el tercer componente básico del método científico, junto con la Teoría y el Experimento. Nos hallamos pues ante una alteración profunda de la herencia científica de Galileo y Newton, que la enriquece en la dirección de las matemáticas.

Esta nueva visión, que comenzó en la ingeniería y las ciencias físicas, se practica hoy día intensamente en todas las ciencias, dando lugar a nuevas **disciplinas o subdisciplinas**, como la Física Computacional y la Dinámica de Fluidos Computacional, la Biología Computacional o la Química Computacional. Programas de las licenciaturas (incluso nuevas titulaciones), programas de investigación internacionales, centros de investigación, congresos y revistas prestigiosas confirman la relevancia del tercer rostro de la ciencia en los albores del siglo XXI. La ventaja del camino computacional queda perfectamente reflejada en la siguiente declaración de los Reviews in Computational Chemistry: “As a technique, Computational Chemistry has the advantage of producing answers cheaply and quickly (compared to e.g. thermodynamic measurements)". Es decir, que cuesta menos calcular que medir (y es fiable). Y añade otro aspecto importante, la capacidad para examinar lo hipotético: “and [it works] for hypothetical structures, like transition states".

Lo anterior no se circunscribe a las ciencias clásicas, afecta incluso en mayor grado a la ingeniería y la ciencia económica. La novedad del cambio, que sucede ante nuestros ojos, es un reto de enorme importancia para el futuro de las matemáticas y resulta difícil de asimilar para muchos colegas. No hay nada malo en seguir anclado en un pasado glorioso,... pero se paga un precio. De la amplitud del panorama hablamos en la próxima sección.

## 8. LOS RETOS Y TENDENCIAS DEL SIGLO XXI. MATEMÁTICAS EN LAS CIENCIAS, LA INDUSTRIA, LAS FINANZAS Y LA ADMINISTRACIÓN

En consonancia con los apuntes vistos de la reciente evolución de la matemática pura y aplicada, que combina la exigencia de una sólida teoría con una ambición universal, el panorama que ofrece el mundo de las matemáticas de cara al futuro es de una asombrosa variedad. Usando un idioma algo retórico, los expertos dicen que las matemáticas son ubicuas, están por todas

partes, y relevantes, importan. La modelización matemática juega un papel mayor que nunca en la ciencia, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales.
Mencionaremos solamente algunos de los principales temas de aplicación que aparecen en la literatura, en los congresos, en los programas de los institutos de investigación. También hemos utilizado una serie de fuentes. En itálicas señalamos aspectos matemáticos relacionados para comodidad del lector.

- **Mecánica celeste**. Problemas de la ciencia aeroespacial. Estabilidad y caos en sistemas dinámicos. Atractores extraños. Mecánica de sólidos y fluidos en gravedad cero.
- **Teoría de fluidos**. Aplicación a la Meteorología y la Climatología. Ingeniería del océano. Problemas medioambientales complejos, recalentamiento global y otros temas geosociales. Modelos de circulación global, modelos de equilibrio; modelización estocástica del clima; jerarquías de modelos de complejidad intermedia, como los modelos geostróficos. Glaciología. Acústica y aplicación a la industria del sonido. Fluidos industriales, lubricación. Turbulencia. Predecibilidad y caos. Estabilidad, bifurcación. Problemas de frontera libre. Áreas de intersección, como la interacción fluido-estructura.
- **Aeronáutica.** Problemas de la hidrodinámica. Vuelo supersónico y transónico. Problemas de la combustión (propagación de llamas, detonación). Ondas de choque y ecuaciones hiperbólicas. Capas límite y desarrollos asintóticos. Ondas viajeras.
- **Física fundamental**. Las matemáticas del mundo atómico y de las partículas elementales. El modelo estándar, la electrodinámica cuántica, la cromo-dinámica cuántica. Teoría de grupos, renormalización, teorías gauge, supersimetría, ecuaciones de Yang-Mills, instantones, dilatones, \branes",.... Geometrías y topologías exóticas en dimensiones superiores.
- **Astrofísica.** Relatividad general, modelos estelares. Matemáticas de la física de plasmas, magnetohidrodinámica. Ecuaciones cinéticas (Boltzmann, Fokker-Planck, Vlasov, ...).
- **Ciencias de la tierra**. Problemas de recursos y minería. Problemas de conservación del medio ambiente. Transporte de contaminantes en el aire y el suelo. Hidrología computacional. Las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filtración en los suelos, de la difusión de contaminantes: sistemas no lineales de EDPs y problemas de frontera libre. Matemáticas de los fenómenos sísmicos, propagación de ondas, problemas inversos.
- **Ciencia de materiales.** Modelado y simulación de materiales "composites", materiales magnéticos, polímeros, cristal y papel. Propagación de fracturas y otros mecanismos de fallos. Elasticidad lineal y no lineal. Teoría de la homogeneización. Transiciones de fase, crecimiento de cristales, superconductividad e histéresis.
- **Nanotecnología.** Ópticas integradas, redes ópticas. Electrónica y óptica cuántica. Técnica de Nanoescalas en medicina, materiales porosos. Acoplamiento de modelos con estados cuánticos, mesoscópicos y continuos. Teoría de Boltzmann semiclásica, ecuación de Wigner.
- **Ingeniería industrial**. Procesos de la siderurgia, altos hornos. Prototipos de la industria automovilística (fluidos, aerodinámica, materiales y teoría de la fractura).
- **Comunicaciones**. Telecomunicación y redes ópticas: análisis, simulación, optimización, optimización de la tasa de transmisión, diseño de redes. Antenas, radar y sonar. Teoría de campos electromagnéticos. Los hornos de microondas acoplan las ecuaciones de Maxwell con la teoría del calor de Fourier.
- **Matemática Discreta**. Teoría de grafos, combinatoria. Aplicaciones a la administración de empresas, programación de tareas, rutas,...
- **Informática**. Lógica matemática, algoritmia, complejidad computacional. Paralelización. Autómatas finitos, lenguajes formales, álgebra. Aprendizaje de máquina, minería de datos, inteligencia artificial, proceso del idioma natural. El diseño de la computadora cuántica abriría un nuevo mundo a la computación.
- **Control**. Control óptimo, control robusto, control no lineal. Control predictivo. Sistemas de control ”uzzy". Redes neuronales. Detección y diagnostico de fallos en los procesos industriales. Modelado y control de sistemas económicos. Programación con condiciones. Comunicación y control de sistemas híbridos distribuidos.
- **Automatización y Robótica**. Geometría Algebraica y computación. Visión por computadora y realidad virtual. Aprendizaje biológico y computacional.
- **Teoría de la información**. Codificación de mensajes, códigos correctores de errores. Las sorprendentes aplicaciones de la teoría de números y el álgebra. Proceso y compresión de imágenes. Ondículas, fractales, teorías de EDPs no lineales. Reconocimiento del habla y las imágenes.
- **La estadística en la ciencia, la industria, la empresa y el gobiern**o. Estimación y tests de hipótesis, diseño de experimentos. Procesos estocásticos. Series temporales. Epidemiología. Control de calidad. Análisis de varianza. Análisis multivariante. Muestreo, votaciones.

- **Teoría de Optimización y Programación Matemática**. Programación entera, programación no lineal, programación convexa. Métodos iterativos. Optimización del diseño industrial. Métodos numéricos, ecuaciones en derivadas parciales, cálculo de variaciones, combinatoria, álgebra lineal.
- **Problemas de transporte óptimo**. Los problemas del tráfico (modelos continuos y discretos). Planificación de redes. El tráfico en la Web.
- **Economía.** La matemática financiera (valoración de opciones, comercio de derivados, riesgo,...) une las ecuaciones diferenciales estocásticas con las ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre. Modelos para la economía global.
- **Química.** Química cuántica: simulación de estructuras atómicas y moleculares a través de las ecuaciones fundamentales. Modelos de SchrÄodinger, Hartee-Fock, Thomas-Fermi, Born-Oppenheimer,... Dinámica de reacciones, combustión. Matemáticas de la nucleación, crecimiento de cristales y quemotaxis. La propagación de frentes, ondas viajeras, osciladores químicos. Caos. Diseño de drogas.
- **Biología:** Ecología matemática, epidemiología, biométrica, la bioinformática. Matemática de la Genética, Filogenética computacional. La estructura y función del ácido nucleído. Evolución molecular. Proteómica. Cálculo con ADN. Alineación de secuencias, razonamiento borroso. Modelización matemática en biopolimerización.
- **Medicina:** interacción fluido-estructura como modelo para el flujo sanguíneo. Modelado y simulación de la función de otros órganos: cerebro, pulmones e hígado. Auto-organización y geometrías fractales. Asistencia computacional en cirugía. Farmacocinética, modelado del crecimiento de tumores. Neurociencia computacional. Matemática de las enfermedades infecciosas y difusión de epidemias. Órganos artificiales, modelado del sistema inmunológico.
- **Tratamiento de imágenes en Medicina**. Tomografía: tomografía computarizada, reconstrucción 3D de imágenes. Transformadas de Fourier y Radon, problemas inversos.
- Aunque la **Matemática computacional** (tomada aparte de la Informática) penetra todos los campos de aplicación, merece una mención por sí misma en este listado: métodos numéricos y códigos; algoritmos eficientes; aproximación, estimaciones (a priori y a posteriori) del error, métodos y modelos adaptativos, mallado, descomposición del dominio, análisis multiescala, cálculo numérico de procesos aleatorios,...
- Por otro lado, la **Modelización Matemática** en sus diferentes variantes (determinista, continua, discreta,...) plantea los problemas de validación de modelos y las técnicas para obtener y elaborar los datos en que se basa la validación (ver apartado de Estadística), así como el importante (y debatido) concepto de jerarquía de modelos, una manera progresiva de acercarse a la “realidad "que es hoy día parte integrante de la \caja de herramientas" del científico aplicado (los viejos idealistas con su la \verdad eterna" se revolverán en sus tumbas; ¿o quizá no?).

Detendremos aquí el listado y haremos una muy necesaria pausa con algunos comentarios. Se observará que la lista está sólo ligeramente articulada por afinidad de temas; sin embargo, la interconexión íntima de las ramas de la matemática aplicada nos obliga a cometer repeticiones, o a poner un tema bajo uno de varios posibles títulos. Por otra parte, hemos dejado fuera diversos campos de aplicación: las teorías de los sistemas complejos, la autosemejanza en el mundo natural, la formación y reconocimiento de modelos (patterns) y el sistema de posicionamiento global (GPS), la matemática de los sistemas electorales; la arquitectura, la industria textil y la alimentaria también han llamado a la puerta de la matemática. Y hay una muy fuerte tendencia para que la Matemática juegue un papel importante en las artes visuales, como ya hace en la Industria del Ocio combinada con el progreso formidable de la tecnología de las computadoras. Y "cómo pude haberme olvidado de hablarles de la Teoría de Nudos, del Método Simplex de G. Dantzig, líder incontestado del uso de las matemáticas en las empresas, o del Filtro de Kalman?

En conclusión, esta larga lista es incompleta, principalmente debido al conocimiento limitado del autor; pero espero que convenza al lector de la variedad enorme de intereses de la matemática aplicada actual.

Me gustaría agregar una reflexión personal final sobre las tendencias profundas que veo bajo la diversidad anterior. Las matemáticas del porvenir serán mucho más estocásticas y algorítmicas de lo que fueron hasta el siglo XX, y la modelización matemática será considerada una parte esencial de la educación y la actividad matemática, junto con el cálculo y la simulación. Pero pase lo que pase, me parece que una prueba clara y completa, y tan elegante como sea posible, será siempre el meollo de nuestra ciencia, como ha sido desde tiempos del buen Euclides, y los matemáticos futuros todavía se entusiasmarán con problemas y conjeturas, y algunos de ellos al modo de Galileo mirando al mundo (o las estrellas). Y construirán, posados sobre hombros de gigantes de los pasados, esos delicados, intrincados y huidizos objetos llamados teorías, algunas de ellas destinadas al olvido, unas pocas a la eternidad,..., o al uso diario. "Quién se maravilla ya de la sorprendente existencia de las ondas electromagnéticas llenando el aire, ahora que incluso se han vuelto una forma de contaminación? Pero basta de filosofía por el momento.