LÓGICA MATEMÁTICA

Compendio de diversos autores

INTRODUCCIÓN

Aprender matemáticas, física y química "es muy difícil"; así se expresan la mayoría de estudiantes de todos los niveles, sin embargo pocas veces se busca una explicación del porqué no aprenden las ciencias exactas los alumnos. Nuestra teoría es la siguiente: "**Los alumnos no aprenden ciencias exactas, porque no saben relacionar los conocimientos que se proporcionan en la escuela (leyes, teoremas, formulas) con los problemas que se le presentan en la vida real**". Otro problema grave es que el aprendizaje no es significativo. El presente trabajo pretende motivar a los estudiantes para que con ayuda de la "lógica matemática", él sea capaz de encontrar estos relacionamientos entre los diferentes esquemas de aprendizaje, para que de esta manera tenga una buena estructura cognitiva. Consideramos que si el alumno sabe lógica matemática puede relacionar estos conocimientos, con los de otras áreas para de esta manera crear conocimiento.

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. La lógica es ampliamente aplicada en la filosofía, matemáticas, computación, física. En la filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. En las matemáticas para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticos que puedan ser aplicados en investigaciones. En la computación para revisar programas. En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo; para ir de compras al supermercado un ama de casa tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea. Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica.

La lógica es pues muy importante; ya que permite resolver incluso problemas a los que nunca se ha enfrentado el ser humano utilizando solamente su inteligencia y apoyándose de algunos conocimientos acumulados, se pueden obtener nuevos inventos innovaciones a los ya existentes o simplemente utilización de los mismos.

De esta manera, primeramente se establece la importancia de la lógica matemática, después definimos el concepto de **proposición**. Se establece el significado y utilidad de **conectivos lógicos** para formar **proposiciones compuestas**. Más tarde abordamos las **proposiciones condicionales y bicondicionales**. Definimos **tautología, contradicción y contingente**, y proporcionamos una lista de las tautologías más importantes, así mismo explicamos a que se le llama proposiciones lógicamente equivalentes apoyándonos de **tablas de verdad**. Para finalizar; abordamos los **métodos de demostración: directo y por contradicción**, en donde se incluyen reglas de inferencia.

Consideramos que sí el alumno aprende lógica matemática no tendrá problemas para aprender ciencias exactas y será capaz de programar computadoras, ya que un programa de computadora no es otra cosa que una secuencia de pasos lógicos, que la persona establece para resolver un problema determinado.

Es importante mencionar que en las demostraciones no hay un solo camino para llegar al resultado. El camino puede ser más largo o más corto dependiendo de las reglas de inferencia y tautologías que el alumno seleccione, pero definitivamente deberá llegar al resultado. Puede haber tantas soluciones como alumnos y todas estar bien. Esto permite que usted como estudiante tenga confianza en la aplicación de reglas y fórmulas. De tal manera que cuando llegue a poner en práctica estos postulados, sea capaz de inventar su propia solución, porque en la vida cada quien resuelve sus problemas aplicando las reglas de inferencia para relacionar los conocimientos y obtener el resultado.

DESARROLLO

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

PROPOSICIONES Y OPERACIONES LÓGICAS

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha. Ejemplo:

p: La tierra es plana.
q: $-17 + 38 = 21$
r: $x > y-9$
s: El América será campeón en la presente temporada de Fútbol
t: Hola ¿como estas?
w: Lava el coche por favor.

Los incisos **p** y **q** sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables **x** y **y** en determinado momento. La proposición del inciso **s** también está perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fútbol. Sin embargo los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

CUANTIFICADORES

CUANTIFICADOR UNIVERSAL Y EXISTENCIAL

Existen especialmente en matemáticas, expresiones que contienen variables tales como x, y, z, etc., para las cuales su valor de verdad depende del valor que tome la variable.

Ejemplo 1. $\mathbf{x + 1 = 2}$

Esta proposición es verdadera si $\mathbf{x = 1}$ y falsa si $\mathbf{x \neq 1}$. A estas proposiciones se les llama ***"Proposiciones abiertas"***

Hasta el momento se han tratado proposiciones a las cuales se les puede asignar un valor de verdad, ya sea falso o verdadero, pero la lógica de proposiciones abiertas, asigna una expresión llamada cuantificador, que permite restringir los valores de las variables, de tal forma que la proposición toma un solo valor de verdad para dicha restricción.

En el ejemplo, la proposición se puede enunciar de las siguientes formas:

1. Existe $\mathbf{x = 1}$ tal que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición verdadera
2. Para todo $\mathbf{x \neq 1}$, se tiene que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición falsa.

1. **($\exists$x = 1) / (x + 1 = 2)** (Verdadera)
2. **($\forall$x $\neq$ 1) / (x + 1 = 2)** (Falsa)

Simbólicamente, en el primer caso el cuantificador recibe el nombre de cuantificador **existencial**, pues está informando que existe un sólo valor para x que hace verdadera la proposición dada, mientras que en el segundo caso el cuantificador se llama **universal** porque afirma que todos los valores de x diferentes de 1 hacen la proposición falsa, es decir, que un valor de x diferente de 1 convierte **x + 1 = 2** en proposición falsa.
Cualquier cuantificador de la forma para todo, todo, para cada, o cada se llama cuantificador universal y se simboliza por $\forall$

Ejemplo 2. ($\forall$x) / (x + 4 = 4 + x). Significa que todo x verifica la ecuación.
La palabra alguno(s) significa que por lo menos uno verifica la condición. Los cuantificadores de la forma existe por lo menos uno, y se llaman cuantificadores existenciales y se representan así: $\exists$

Ejemplo 3. **($\exists$x) / (2 x + 2 = 5)**. Significa que existe un número que verifica la ecuación.

Valores de verdad de expresiones con cuantificadores

Para determinar el valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador es importante tener claros los siguientes conceptos:

1. **Conjunto Universal:** es el conjunto que contiene todos los elementos considerados en un estudio determinado.
2. **Conjunto dominio de la variable:** corresponde al conjunto de valores posibles de la variable.

Ejemplo 1. **($\forall$x $\in$ R) / (2 x - 1 = 0)** que se lee: “Para todo x que pertenece a los reales se verifica que **2x - 1 = 0**”
En esta proposición el conjunto universal está formado por los números reales y el dominio de la variable es x = ½.
El ejemplo afirma que todo número real verifica 2x - 1 = 0, lo cual es falso, pero si se cambia el conjunto universal, por el conjunto { 1/2 }, la proposición se convierte en verdadera y se enuncia así:
($\forall$x $\in$ { 1/2 }) / (2 x - 1 = 0) es verdadera.
Lo anterior conduce a la siguiente afirmación: ***Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera sí y sólo sí el dominio de la variable es igual al conjunto universal.***

Ejemplo 2. **($\exists$x $\in$ R) / (x^2 - 1 = 0)**
Conjunto universal: R (reales)
Dominio de la variable: **x = 1** , **U**, x = -1
En este caso el cuantificador existencial afirma que por lo menos existe un valor que satisface la proposición, así, el ejemplo 2 es verdadero.

Ejemplo 3. **($\exists$x $\in$ R) (x^2 + 1 = 0)**
El conjunto universal está formado por los números reales, pero el dominio de la variable es el conjunto vacío, pues, no hay un número real que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1 de cómo resultado cero, esto hace que la proposición sea falsa.
Del análisis de los ejemplos 2 y 3 se puede afirmar: ***Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el dominio de la variable no es vacío***.

CONECTIVOS LÓGICOS Y PROPOSICIONES COMPUESTAS

Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son:

Operador y (Λ): Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es: {Λ, un punto (**.**), un paréntesis}. Se le conoce como la multiplicación lógica:

Ejemplo: Sea el siguiente enunciado "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería". Sean:
p: El coche enciende.
q: Tiene gasolina el tanque.
r: Tiene corriente la batería.
De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es: **p = q Λ r** y la tabla de verdad queda como la que se anexa a la derecha. Donde: 1 = verdadero y 0 = falso

q	**r**	**p = q Λ r**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

En la tabla anterior el valor de q=1 significa que el tanque tiene gasolina, r=1 significa que la batería tiene corriente y p = q, r=1 significa que el coche puede encender. Se puede notar que si q o r valen cero implica que el auto no tiene gasolina y que por lo tanto no puede encender.

Operador o (V): Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se indica por medio de los siguientes símbolos: {**V, +, È**}. Se conoce como la suma lógica.

Ejemplo: Sea el siguiente enunciado: "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase". Donde:
p: Entra al cine.
q: Compra su boleto.
r: Obtiene un pase.
La única manera en la que no puede ingresar al cine (p=0), es que no compre su boleto (q=0) y que no obtenga un pase (r=0).

q	**r**	**p = q V r**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Operador No (¬): Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador No se obtendrá su complemento o negación (falso). Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {**¬, -**}.

Ejemplo: La negación de está lloviendo en este momento (p=1), es no está lloviendo en este momento (¬p=0)

p	**¬p**
1	0
0	1

Además de los operadores básicos (**y**, **o** y **No**) existe el operador **ó**, cuyo funcionamiento es semejante al operador o con la diferencia en que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, cuando ambas con verdad el resultado es falso. En este momento ya se pueden representar con notación lógica enunciados más complejos.

Ejemplo: Sean las proposiciones:
p: Hoy es domingo.
q: Tengo que estudiar teorías del aprendizaje. r: Aprobaré el curso.
El enunciado: "Hoy es domingo y tengo que estudiar teorías de aprendizaje o no aprobaré el curso". Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera: **(p Λ q) V r**

Por otro lado con ayuda de estos operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos **No-y** (combinación de los operadores **No** y **y**), **No-o** (combina operadores **No** y **o**) y **ó-No** (resultado de **ó** y **No**).

PROPOSICIONES CONDICIONALES

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera: **p → q.** Se lee "Si p entonces q"

Ejemplo: El candidato del partido X dice "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional. Su tabla de verdad es la siguiente:
Sean:
p: Salió electo Presidente de la República.

q: Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

De tal manera que el enunciado se puede expresar como **$p \rightarrow q$**. y la tabla de verdad sería como la de la derecha

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente: Considere que se desea analizar si el candidato presidencial mintió con la afirmación del enunciado anterior. Cuando p=1; significa que salió electo, q=1 y recibieron un aumento de 50% en su sueldo, por lo tanto $p \rightarrow q = 1$; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña. Cuando p=1 y q=0 significa que $p \rightarrow q = 0$; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios. Cuando p=0 y q=1 significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que $p \rightarrow q = 1$.

PROPOSICIÓN BICONDICIONAL

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicinal como: **$p \leftrightarrow q$.** Se lee **"p si solo si q"**. Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es.

Ejemplo: El enunciado siguiente es una proposición bicondicional:
"Es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de diez" Donde:
p: Es buen estudiante.
q: Tiene promedio de diez.
Por lo tanto su tabla de verdad es:
La proposición condicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A partir de este momento, ya se estás en condiciones de representar cualquier enunciado con conectores lógicos.

Ejemplo: Sea el siguiente enunciado "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si solo si soy desorganizado" Donde:
p: Pago la luz.
q: Me cortarán la corriente eléctrica.
r: Me quedaré sin dinero.
s: Pediré prestado. t: Pagar la deuda.
w: soy desorganizado.

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \neg t] \leftrightarrow w$$

TABLAS DE VERDAD

En estos momentos ya se está en condiciones de elaborar cualquier tabla de verdad. A continuación se presenta un ejemplo para la proposición **$[(p \rightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$**

p	q	r	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)$	$r \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

No de líneas = 2^n, donde n = número de variables distintas.

Ejemplo: Construir la tabla de verdad para la proposición **$\neg$ (p Λ q)**

p	q	**p Λ q**	**$\neg$ (p Λ q)**
1	**1**		
1	**0**		
0	**1**		
0	**0**		

Tautología y contradicción: Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contrapositiva **(p$\rightarrow$q) $\leftrightarrow$ ($\neg$q$\rightarrow$ $\neg$p)** cuya tabla de verdad se indica a continuación:

p	**q**	**$\neg$p**	**$\neg$q**	**p$\rightarrow$q**	**$\neg$q$\rightarrow$ $\neg$p**	**(p$\rightarrow$q)$\leftrightarrow$($\neg$q$\rightarrow$ $\neg$p)**
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Tenga en cuenta que en las tautologías para todos los valores de verdad **el resultado de la proposición es siempre 1**. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

A continuación se cita una lista de las tautologías más conocidas y reglas de inferencia de mayor uso en las demostraciones formales:

TAUTOLOGÍAS FUNDAMENTALES

1. **Reflexividad de equivalencia**
   p ≡ p

2. **Doble negación**
   $\neg\neg$ p ≡ p

3. **Leyes asociativas**
   3.1 ((p≡q) ≡r) ≡ (p≡(q≡r))
   3.2 (p$\wedge$q)$\wedge$r ≡ p$\wedge$(q$\wedge$r)
   3.3 (p$\vee$q) $\vee$r ≡ p$\vee$(q$\vee$r)

4. **Leyes conmutativas**
   4.1 p$\wedge$q ≡ q$\wedge$p
   4.2 p$\vee$q ≡ q$\vee$p
   4.3 p≡q ≡ q≡p

5. **Leyes distributivas**
   5.1 p$\wedge$(q$\vee$r) ≡(p$\wedge$q)$\vee$(p$\wedge$r)
   5.2 p$\vee$(q$\wedge$r) ≡(p$\vee$q)$\wedge$(p$\vee$r)

6. **Elemento neutro**
   6.1 p≡ p ≡ verdadero
   6.2 p $\wedge$ verdadero ≡ p
   6.3 p$\vee$ falso ≡ p

7. **Elemento absorvente**
   7.1 p $\wedge$ falso≡ falso
   7.2 p$\vee$ verdadero ≡ verdadero

8. **Leyes de idempotencia**
   8.1 p$\wedge$ p≡ p
   8.2 p$\vee$ p≡ p

9. Leyes De Morgan

9.1 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

9.2 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

10. Ley de doble negación

$\neg\neg p \equiv p$

11. Ley del tercero excluido

$p \vee \neg p \equiv$ **verdadero**

12. Ley de la contradicción

$p \wedge \neg p \equiv$ **falso**

13. Ley de la implicación

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

14. Ley de la equivalencia

$p \equiv q \equiv p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

15. Ley del contrapositivo

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

16. Fortalecimiento o debilitamiento

$p \Rightarrow p \vee q$

17. Transitividad de la equivalencia

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

18. $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$

19. $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$

20. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \equiv q$

Contradicción: Es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las más usadas y más sencilla es **$p \wedge \neg p$**, como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	$\neg$p	P $\wedge \neg$p
0	1	0
1	0	0

Si en el ejemplo anterior
p: La puerta es verde.
La proposición **$p \wedge \neg p$** equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde". Por lo tanto se está contradiciendo o se dice que es una falacia.
Una proposición compuesta cuyos resultados en sus deferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado 1s y 0s se le llama contingente.

Equivalencia lógica: Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente **equivalentes**. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como **$p \equiv q$**.
Un buen ejemplo es el que se estableció para ilustrar la tautología en donde se puede observar que las columnas de **$(p \to q)$** y **$(\neg q \to \neg p)$** para los mismo valores de verdad, por lo tanto se puede establecer que **$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$**

REGLAS DE INFERENCIA

Los argumentos basados en tautologías representan métodos de razonamiento universalmente correctos. Su validez depende solamente de la forma de las proposiciones que intervienen y no de los valores de verdad de las variables que contienen. A esos argumentos se les llama **reglas de inferencia.** Las reglas de inferencia permiten relacionar dos o más tautologías o hipótesis en una demostración.

Ejemplo 1. ¿Es válido el siguiente argumento?
Si usted invierte en el mercado de valores, entonces se hará rico. Si se hace usted rico, entonces será feliz.
Si usted invierte en el mercado de valores, entonces será feliz.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Sea: p: Usted invierte en el mercado de valores, q: Se hará rico y
r: Será feliz
De tal manera que el enunciado anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

Ejemplo 2. ¿Es válido el siguiente argumento?
Si bajan los impuestos, entonces se eleva el ingreso.
El ingreso se eleva.
Los impuestos bajan.
Solución: Sea: p: Los impuestos bajan y q: El ingreso se eleva.
El aplicar la regla de inferencia es lo que le cuesta más al alumno y se deberá poner mucha atención para que el alumno aprenda a aplicar dicha regla.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

En una demostración no solamente hay tautologías e hipótesis, también existen reglas de inferencia que permiten obtener nuevas líneas válidas, esta es la parte en donde la mayoría de alumnos tienen problemas y en donde no sabe que regla aplicar para resolver un determinado problema. A continuación se cita una lista de las principales reglas de inferencia que se pueden aplicar en una demostración.

Adición	**Simplificación**	**Silogismo disyuntivo**	**Silogismo hipotético**
$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$
Conjunción	**Modus pones**	**Modus tollens**	
$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN.

Demostración por el método directo: Supóngase que $p \rightarrow q$ es una tautología, en donde p y q pueden ser proposiciones compuestas, en las que intervengan cualquier número de variables propositivas, se dice que q se desprende lógicamente de p. Supóngase una implicación de la forma: $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow q$
Es una tautología. Entonces está implicación es verdadera sin importar los valores de verdad de cualquiera de sus componentes. En este caso, se dice que q se desprende lógicamente de p_1, p_2,......., p_n. La escritura aparece en el recuadro de la derecha:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Realmente el camino que se debe seguir para llevar a cabo una demostración formal usando el método directo. Significa que sí se sabe que p_1 es verdadera, p_2 es verdadera,...... y p_n también es verdadera, entonces se sabe que **q** es verdadera.

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones de este tipo:

$$(p_1 \land p_2 \land \ldots\ldots \land p_n) \to q$$

Donde las p_i son llamadas hipótesis o premisas, y **q** es llamada conclusión. **"Demostrar el teorema", es demostrar que la implicación es una tautología. Note que no estamos tratando de demostrar que q (la conclusión) es verdadera, sino solamente que q es verdadera si todas las pi son verdaderas.**

Toda demostración debe comenzar con las hipótesis, seguidas de las tautologías y reglas de inferencia necesarias, hasta llegar a la conclusión.

A continuación se prueba un enunciado en donde se puede apreciar el uso tanto de las tautologías como de las reglas de inferencia.
Sean: p: Trabajo, q: Ahorro, r: Compraré una casa y s: Podré guardar el coche en mi casa.
Analizar el siguiente argumento: "Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro".
El enunciado anterior se puede representar como: $p \lor q \to r$; y $r \to s$; entonces $\neg s \to \neg q$
Equivale también a probar el siguiente teorema: $[(p \lor q) \to r] \land [r \to s] \to [\neg s \to \neg q]$
Como se trata de probar un teorema de la forma general: $p_1 \land p_2 \land \ldots\ldots \land p_n \to q$
Se aplica el procedimiento general para demostración de enunciados válidos. A continuación se demuestra el teorema respaldando cada uno de sus pasos en tautologías o reglas de inferencia ya conocidas.

1.	$p \lor q \to r$	Hipótesis
2.	$r \to s$	Hipótesis
3.	$q \to (q \lor p)$	Fortalecimiento o debilitamiento (16)
4.	$q \to (p \lor q)$	Ley conmutativa (4.2) de 3 a 4
5.	$q \to r$	Silogismo hipotético de 4 a 1
6.	$q \to s$	Silogismo hipotético de 5 a 2
7.	$\neg s \to \neg q$	Contrapositiva de 6 (15)

El enunciado es válido aunque la conclusión puede ser falsa o verdadera.

Es recomendable numerar cada uno de los pasos. Se puede notar que las primeras líneas son hipótesis, la línea 3 es una tautología conocida y de la línea 4 a 7 se obtuvieron aplicando reglas de inferencia. Se indica la regla de inferencia aplicada por medio del número de la derecha, y las líneas a las cuales se les aplicó dicha regla de inferencia por medio de los números de la izquierda.
El ejemplo anterior es una demostración sencilla, pero puede ser tan complicada como sea necesario y el método debe funcionar.

Demostración por contradicción: El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante a la que se realizó por el método directo con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino además se incluye en la demostración una línea con la negación de la conclusión. Por otro lado el objetivo de la demostración es llegar a una contradicción.

A continuación se ilustra una forma de demostrar demostración del siguiente teorema por el método de contradicción

Teorema: [p $\rightarrow$ (p V r)] V [(q V s) $\rightarrow$ t] V (p V s) $\rightarrow$ t

Demostración

1.	**p $\rightarrow$ (p V r)**	Hipótesis
2.	**(q V s) $\rightarrow$ t**	Hipótesis
3.	**p V s**	Hipótesis
4.	**$\neg$t**	Negación de la conclusión
5.	**$\neg$ (q V s)**	Modus tollens de 2 a 4
6.	**$\neg$q V $\neg$s**	Ley de De Morgan (9.1) a 5
7.	**$\neg$q**	Simplificación (o Teorema 19) a 6
8.	**$\neg$s V $\neg$q**	Ley conmutativa a 6
9.	**$\neg$s**	Simplificación a 8
10.	**s V p**	Ley conmutativa a 3
11.	**p**	Silogismo disyuntivo de 10 y 9
12.	**q V r**	Modus ponens de 11 y 1
13.	**q**	Simplificación a 12
14.	**q V $\neg$q**	Conjunción de 13 y 7
165.	**Contradicción**	

Note que juntamente con las premisas se debe incluir la negación de la conclusión. En este momento usted ya tiene los elementos para llevar a cabo demostraciones. Que ese mismo teorema lo represente con su tabla de verdad y haga la correspondiente demostración por los dos métodos antes mencionados.

La forma en que el aprende a aplicar reglas de inferencia es semejante a la manera en que deberá realizar una factorización o una aplicación de una fórmula en cálculo diferencial o integral o la formula que debe aplicar para resolver un problema en física. Lo que debe aprender es a relacionar los distintos conocimientos para poder llegar a la solución. Es importante mencionar que no existe un único camino para realizar una demostración, resolver un problema de física o una situación de la vida cotidiana.

ACTIVIDADES DE RETROALIMENTACIÓN

1. Construir las siguientes tablas de verdad:

a. **$(p \wedge q) \rightarrow [\neg (q \vee r)]$**
b. **$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge q)$**
c. **$p \wedge (\neg q \vee r)$**
d. **$(p \rightarrow r) \wedge (\neg q) \leftrightarrow (\neg q \vee r)$**

2. Demostrar mediante tablas de verdad si los siguientes postulados son tautologías o contradicciones:

a. $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$
b. $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
c. $[r \rightarrow (p \vee \neg q)] \leftrightarrow (q \vee r)$
d. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \equiv q$

3. Demostrar por el método directo o por contradicción si las siguientes funciones lógicas son tautologías o contradicciones

a. **$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$**
b. **$[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$**

BIBLIOGRAFÍA

Libro	**Autor**	**Editorial**
Estructuras de Matemáticas Discretas	Bernard Kolman, Robert C. Bisby, Sharon Ross	Prentice Hall
Elements of Discrete Mathematics	C.L.Liu	Mc graw Hill
Matemáticas Discreta y Combinatoria	Ralph P. Grimaldi	Addiso Wesley
Matemáticas Discretas con aplicación a las Ciencias de la Computación	Jean Paul Tremblay, Ram Manohar	CECSA
Matemáticas Discretas	Kenneth A. Ross, Charles R.B. Wright	Prentice Hall
Matemática Discreta y Lógica	Winfried Karl, Jean Paul Tremblay	Prentice Hall
Matemáticas Discretas	Richard Johnsonbaugh	Editorial Iberoamerica

Edivar Fernández Hoyos
edivarf@gmail.com
Visite www.akre.jimdo.com