ALGEBRA LINEAL

El **álgebra lineal** es la rama de las matemáticas que estudia los **vectores, espacios vectoriales, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales**. Los espacios vectoriales son un tema central en las matemáticas modernas, por lo que el álgebra lineal se usa ampliamente en álgebra (estudio de las estructuras) y análisis funcional**. El álgebra lineal tiene una representación concreta en la geometría analítica y tiene aplicaciones en el campo de las ciencias naturales y las ciencias sociales.**

A. NÚCLEOS TEMÁTICOS MÁS IMPORTANTES

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES
- Operaciones con matrices
- Tipos de matrices
- Operaciones elementales de filas
- Matriz inversa
- Método de eliminación de Gauss

DETERMINANTES
- Propiedades
- Métodos para calcular determinantes
- Regla de Kramer

ESPACIOS VECTORIALES
- Definición y propiedades

B. BREVE RESUMEN

1. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una estructura algebraica es un conjunto de operaciones binarias, esta se representan <A, operación>, <{a, b, c}, operación>, así se representan las estructuras algebraicas sencillas, las dobles se representan <conjunto, 1o. operación, 2o. operación>.
Una operación binaria se da cuando dos conjuntos se operan entre si y el resultado de esta operación da un tercer conjunto.

Tabla de Cayley es una tabla que contiene filas y columnas, para poder trabajar con estas tablas se necesitan dos conjuntos finitos ejemplo:
A{1,2,3} y B{4,5,6}
C = A x B → C donde x es una multiplicación ordinaria.
Donde C ={4,5,6,8,10,12,15,18}

x	4	5	6
1	4	5	6
2	8	10	12
3	12	15	18

ESTRUCTURA ALGEBRAICA: Estos se pueden clasificar según la cantidad de operaciones que tengan.

Según las leyes que cumplan Las estructuras algebraicas de una operación así tienen un nombre en particular así:

Si cumple la ley de cierre se le denomina como estructura algebraica monoide.

Si cumple la de cierre y la asociativa es un semigrupo.
Si cumple la de cierre, la asociativa y la ley de identidad es un semi grupo con identidad.
Si cumple la de cierre, la asociativa, la de identidad e la inversa es un grupo.
Si cumple ser grupo mas la ley conmutativa es un grupo abeliano.

Mientras que las estructuras algebraicas de dos operaciones, pueden ser: **Anillos, divisor cero, dominio entero o cuerpo o campo.**

Para que una estructura algebraica de dos operaciones sea anillo esta debe analizarse separadamente y así se clasifica:

- Para que sea anillo la primera operación debe de ser **Grupo abeliano** como lo vimos anteriormente.
- Las dos operaciones son compatibles y esto se hace haciendo que la segunda operación se **distribuya** en la primera operación.

Si los dos primeros pasos se cumplen entonces empezaremos a operar la segunda operación tomando en cuenta que: Si la primera operación es grupo abeliano y la segunda operación es grupo entonces este será un anillo.
Si la segunda operación es un **semigrupo** este será **anillo conmutativo o abeliano**.
Si la segunda operación es un **semigrupo con identidad** es un **anillo con identidad**.

Así se clasifica un anillo.
Para que una estructura algebraica sea divisor cero este debe de cumplir que X y Y que pertenecen un conjunto B entonces X y Y tienen que ser distintos al elemento neutro de la primera operación y al ser operados con la segunda operación este tiene que dar de resultado el elemento neutro de la primera operación por ejemplo:
Para la operación <A, +, x> donde X y Y pertenecen al conjunto A y que “ + ” es la suma ordinaria y “x” la multiplicación ordinaria entonces deberíamos tener que X ˆ Y ≠ 0 ya que cero es el elemento neutro de la primera operación y X y Y deben de ser distintos de cero y al multiplicar X y Y esta operación debe de dar el elemento neutro de la primera operación. Por lo tanto esta estructura algebraica no es un divisor cero.

Para que una estructura algebraica de dos operaciones sea **Dominio Entero** se dice que primero debe de ser anillo abeliano con identidad y cumplir que X y Y deben de pertenecer a un conjunto B y que si al operar la segunda operación debe de dar el elemento neutro de la primera operación y que X o Y tiene que ser igual al elemento neutro de la primera operación ejemplo:
<A, +, x> donde X y Y pertenecen al conjunto A entonces X x Y = 0 si X o Y = 0.

Para que una estructura algebraica de dos operaciones sean **cuerpo o campo** este tiene que ser primero un dominio entero como lo vimos anteriormente y que todo elemento de la segunda operación tiene un inverso menos el elemento neutro de la primera operación.

Propiedades de las operaciones:

<u>Ley de cierre:</u> esta dice que al operar dos elementos el resultado debe pertenecer al conjunto asignado en la operación.
<u>Elemento inverso o Identidad:</u> este dice que un elemento operado con el neutro de la operación esta debe de dar de resultado el elemento ejemplo: el elemento neutro de la suma es el 0 entonces a + 0 = a y 0 + a = 0.
<u>Elemento inverso:</u> este es aquel que al ser operado con cualquier elemento este debe de dar de resultado el elemento neutro de la operación ejemplo: el elemento inverso de la suma es la resta entonces a + (-a) = 0 y (-a) + a = 0.
<u>Ley asociativa:</u> este dice que los elementos se pueden asociar sin alterar el resultado ejemplo:
(a + b) + c = a + (b + c)=d.

Ley conmutativa: este dice que el orden de los elementos no altera el producto ejemplo: $a + b = b + a = c$.

2. ESPACIOS VECTORIALES

2.1 ESPACIO EUCLIDIANO O ESPACIO VECTORIAL

Un espacio euclidiano es el conjunto de n-adas ordenadas, también conocido por espacio n-dimensional y de denota por R^n . Este es una sucesión de n números reales ejemplo $(a_1,a_2,...,a_n)$ donde los vectores R^n se clasifican así:
R^1 = espacio unidimensional, línea recta real.
R^2 = espacio bidimensional, pares ordenados.
R^3 = espacio tridimensional, terna ordenadas.
....
R^n = espacio n-dimensional, n-adas ordenadas.

2.2 OPERACIONES BASICAS CON VECTORES EN R^2

SUMA DE VECTORES Y MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Siendo X y Y dos vectores y H un escalar se dice que:
$X + Y = (x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (y_1 , y_2) + (x_1 , x_2)$ y la multiplicación por un escalar se define $H(x_1,x_2)=(Hx_1 , Hx_2)$.
Las propiedades que cumple la suma de vectores son las misma que cumplían las estructuras algebraicas de una operación que son: la de cierre, la conmutativa, la asociativa, elemento neutro e identidad y la distributiva.
Las leyes que cumple la multiplicación por un escalar son:
La de cierre bajo la multiplicación Hx,
La distributiva $(H+I)x = Hx + Ix$; $H(x + y) = Hx + Hy$,
La asociativa $(HI)x = H(Ix)$,
y el elemento neutro de la multiplicación $1x = x$.

2.3 OPERACIONES BÁSICAS CON VECTORES EN R^N

Las operaciones básicas con vectores en R^n son las mismas que las operaciones básicas que vimos anteriormente, o sea, la suma de vectores y la multiplicación por un escalar la diferencia seria que en estos serian n-esimos elementos y n-esimos vectores ejemplo:
Para suma de vectores
$X + Y = (x_1 , x_2, ... , x_n) + (y_1 , y_2, ... , y_n)$.
Para multiplicación de un vector por un escalar
$H(x_1 , x_2, ... , x_n) = (Hx_1 , Hx_2, ... , Hx_n)$.

Las propiedades que cumplen son las mismas que vimos en operaciones básicas con vectores en R^2.

El vector cero “0” es el vector neutro o identidad de la suma de vectores en R^n:
$0 = (0, 0, 0, ..., 0_n)$, este vector tiene como propiedad de que es único, es decir, $U + 0 = 0$, $0U = 0$, $a0 = 0$, $aU = 0$ si $a = 0$ o $U = 0$, donde “U” es un vector y “a” un escalar.

2.4 ESPACIOS VECTORIALES

Un espacio vectorial es aquel **conjunto de vectores** que cumple las propiedades o axiomas de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar dichas propiedades vistas en espacios n-dimensiónales R^n o R^2. Un espacio vectorial es un espacio no vacío.
Podríamos decir que un espacio vectorial es la abstracción de las propiedades de un espacio n-dimensional, debe tomarse en cuenta que en el espacio vectorial no se especifica operaciones ni vectores entonces se puede usar cualquier vector y cualquier operación se puede sustituir la suma

de vectores y la multiplicación por un escalar, pero siempre cumpliendo todos las propiedades, siempre seria un espacio vectorial.
Un espacio vectorial cumple con cuatro partes que son: un conjunto de vectores, un conjunto de **escalares**, y dos operaciones. Estos forman un cuerpo que es igual a las estructuras algebraicas de dos operaciones <conjunto, operación, operación> (un cuerpo). Para comprobar que determinado conjunto es un espacio vectorial es preciso definir o especificar las propiedades de suma multiplicación por un escalar como vimos anteriormente tenemos que definir el elemento que actúa como cero (0) y el negado de cada elemento.

Cuerpo: Es el **conjunto de números y operaciones** cualquiera que deben obedecer las diez propiedades algebraicas que mencionamos en operaciones básicas de espacios vectoriales.

Sub cuerpo: Si se operan escalares en forma de sub cuerpo C y se operan bajo **la suma y la multiplicación** por un escalar estos escalares no deben salirse del sub espacio determinado y las operaciones de prueba son las mismas que se han mencionado con anterioridad.

2.5 SUB ESPACIO VECTORIAL

Esto dice que si W es un sub conjunto del espacio vectorial V entonces este es un sub espacio de V. Si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V.
Para que W sea un sub espacio de V debe cumplir las propiedades de cierre de la suma y la multiplicación por un escalar también debe cumplir la ley del elemento neutro bajo la suma, el inverso bajo la suma y el neutro bajo la multiplicación por un escalar.

Combinación Lineal: Se denomina combinación lineal a u vector V en un espacio vectorial U u un cuerpo h.
Si los vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ en u si V puede expresarse como:
$V = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 +... + c_nv_n$ donde c son escalares del cuerpo h.

Envolvente Lineal: Este es el conjunto de todas las combinaciones lineales semejantes denotado por $Lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ y se denomina envolvente lineal de $u_1, u_2, ...,u_n$.

Siendo S un sub conjunto de un espacio vectorial V entonces Lin S es un sub conjunto de un espacio vectorial V y si W es un subconjunto de V que contiene a S, necesariamente Lin S es complemento de W.

3. CONJUNTOS GENERADORES

Si todo vector es un espacio vectorial puede ser expresado como combinación lineal como lo vimos anteriormente entonces se dice que la combinación lineal es un conjunto generador de un espacio vectorial.
En otras palabras si $u_1, u_2, ..., u_n$ generan u entonces u pertenecen a V si existen escalares c tal que: $V = c_1u_1 + c_2v_2 + ... + c_nu_n$ entonces V es una combinación lineal de $u_1, u_2, ..., u_3$.

Espacio fila y Espacio Columna de una Matriz: Si A es una matriz m x n en un cuerpo K cualquiera, las filas de A pueden ser vistas como vectores de K^n llamado espacio fila de U denotado por f - Lin A.
Así haciendo la matriz transpuesta esto quiere decir que si las columnas las hacemos vectores de K^m estos generan un sub espacio de K^m llamado espacio columna de A denotado c-Lin A.
Si hacemos operaciones elementales entre fila a A y obtenemos una matriz B podemos decir que B es que cada fila de B es una combinación lineal de cada fila de A por lo que el espacio fila de B esta contenido al espacio fila de A y así viceversa, o sea, si efectuamos operaciones entre fila a B

obtenemos A y esto seria convención lineal de cada fila de B, esto cumple ciertos teoremas y propiedades:
Las matrices equivalentes por filas tienen el mismo espacio fila.
Dos matrices en forma canónica por fila tienen el mismo espacio fila si estos tienen las mismas filas no nulas.
Toda matriz es equivalente por fila a una matriz única en forma canónica por filas.

Conjuntos Generadores e Independencia Lineal: Si todo vector puede expresarse como combinación lineal de vectores en un conjunto S entonces el conjunto S es un conjunto de un espacio vectorial.

Dependencia e Independencia Lineal: Para que un vector tenga dependencia lineal este debe tener una solución no trivial esto quiere decir que la combinación lineal denotado así: $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, ósea que tiene una solución única.

Para comprobar la independencia Lineal.

Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V entonces partiremos de la ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ (que es la misma que combinación lineal donde c son escalares) se escribe un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en variable c_1, c_2, ..., c_k. Después se hace Gauss-Jordán a la matriz aumentada para diagonal izarla si la solución de la diagonalización tiene solamente solución trivial c_1, c_2, c_3 entonces S es linealmente independiente.

Si un conjunto $S=\{v_1, v_2, ..., v_3\}$, k>=2 es linealmente dependiente si solo si por lo menos uno de los vectores v_j puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores S.

3.1 BASE Y DIMENSION

En un conjunto $S=\{v_1 ,v_2, ..., v_k\}$ es un espacio vectorial V este se denomina Base si cumple que si es espacio vectorial tiene una base con un numero finito de vectores entonces V es de dimensión finita y en caso contrario es de dimensión infinita.

Base y Dependencia Lineal: Si un conjunto finito $S=\{ v_1 , v_2, ..., v_n \}$ es una base de un espacio vectorial V si todo conjunto que contiene mas de n vectores de V es linealmente dependiente.

Numero de Vectores de una Base: Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores entonces toda base V tiene n vectores.

Dimensión de un Espacio Vectorial: Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores entonces esa n es la dimensión de esa base y se denota dim(V) = n.

Teóricamente la dimensión se determina al hallar el conjunto de vectores linealmente independientes que genera el sub espacio, este conjunto es una base del sub-espacio y la dimensión del mismo es el número de vectores que hay en la base.

Para ver que una base en un espacio n-dimensional:
Siendo V su espacio vectorial y n = n entonces $S = \{ v_1, v_2,... ,v_n \}$ en un conjunto de vectores linealmente independientes en V, entonces S es una base de V.
Ejemplo: si $S = \{ v_1, v_2, ..., v_n\}$ genera a V, entonces S es una base de V

4. RANGO DE UNA MATRIZ Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea una matriz Am x n = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & 22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ am1 & am2 & ... & amn \end{bmatrix}$ entonces sus n-adas corresponden a las

Filas de la matriz, ejemplo: (a11, a12, ..., a1n), (a21, a22, ..., a2n), ..., (am1,am2, ..., amn) estas series son los vectores fila de A y los vectores columnas de A corresponden a las columnas de la matriz ejemplo: (a11, a21, ..., am1), (a12, a22, ..., am2), ..., (a1n, a2n, ..., amn).
El espacio fila y el espacio columna son sub-espacios de R^n generado por los vectores fila y espacio columna de A.
Veremos a continuación que los espacios fila y espacio columna comparten muchas propiedades veremos primero el espacio fila, considerando que dos matrices son equivalentes por fila si la segunda matriz se obtiene por operaciones elementales entre fila esta tienen el mismo espacio fila, también hay que considerar que la matriz no se modifica sus columnas por las operaciones elementales entre filas, pero si pueden modificar sus filas.
Si la matriz equivalente B esta en forma escalonada entonces esta constituye un conjunto independiente.
Y la base para el espacio fila de una matriz: si la matriz A es igual en fila a la matriz B entonces en esta ultima los vectores fila B son diferentes de cero esta forma una base para el espacio fila.
Si A es una matriz m x n entonces el espacio renglón y el espacio columna son iguales.
Para poder resolver la ecuación lineal utilizaremos la notación matricial Ax = B que se utiliza para representar ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & 22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ am1 & am2 & ... & amn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ ... \\ xm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ ... \\ bm \end{bmatrix}$$

La solución de éste sistema nos permite ver el conjunto solución, esta solución se escribe como n-adas y se denomina: vectores solución para un sistema homogéneo se utiliza la notación matricial Ax = 0 es un espacio R^n esta solución se denomina espacio solución del sistema también se llama espacio nulo de a. La dimensión de este sistema se denomina nulidad de A.
Para la dimensión de un sistema homogéneo (Ax = 0) en una matriz A m x n y su rango r entonces la dimensión seria n-r (nulidad – rango) = n.

Un sistema homogéneo Ax = 0 es un sub-espacio y un sistema no homogéneo Ax = 0 es un sub-espacio y un sistema no homogéneo Ax = B donde B ≠ 0 este no es sub-espacio ya que el vector cero no es solución.
Si Xp es una solución particular del sistema homogéneo entonces todo el sistema se expresa como X = Xp + Xn donde Xh seria la solución del sistema homogéneo Ax = 0.
Para ver el número de soluciones de las ecuaciones lineales se tomara en cuenta tres reglas:
Si rango (A) = rango [A | B] = n entonces el sistema tiene solución única esto quiere decir si el rango de la solución de la matriz A es igual al del rango de la matriz aumentada en B es igual a n entonces tiene una única solución.
Si el rango (A) = rango [A | B]<n tiene esta soluciones infinitas.
Si el rango (A) = rango [A | B] entonces el sistema no tiene soluciones.

Para las ecuaciones lineales con matrices cuadradas: Si A es una matriz n x n cumple las siguientes condiciones:
A es invertible.

Ax = b si tiene una solución única para la matriz bn x 1.
Ax = 0 tiene solución trivial.
A es equivalente por renglones a 1n.
El determinante de A (|A|) ≠ 0.
Rango (A) = n
Los n vectores fila de A son linealmente independientes.
Los n vectores columna de A son linealmente independientes.

4.1 COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE: Siendo B={ v_1, v_2, ..., v_n} una base de un espacio vectorial y x un vector en V que representándose como combinación lineal ($x = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$) siendo los escalares c. Se denomina como coordenadas x con respecto B en el vector R^n denotado así x_B = (c1, c2, ..., cn).

Cambio de base: Partiendo de una base B a una base B' se tiene que hacer una multiplicación por una matriz p^{-1} y esta la obtenemos sacando la inversa de la base B esto sería P^{-1} y multiplicando P^{-1} por B obtenemos B' y viceversa.

5. APLICACIÓN DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

5.1 SECCIONES CÓNICAS Y ROTACIÓN DE EJES: Toda cónica está dada por $ax^2 + by^2 + cxy + dx + cy + f = 0$ donde c de xy = 0 cuando sus ejes son paralelos al plano. Si la ecuación tiene c en xy ≠ 0 se necesita sacar x' y y'. El ángulo de rotaciones debe sacar con la formula Cot 2Φ = (a-c)/b rotando los polos en sentido antihorario en esta forma la base standard ya vista en temas anteriores exhortada formando un nueva base que es B'= { (Cos Φ, Sen Φ), (-Sen Φ, Cos Φ)} esto para hallar coordenadas en el plano P(x, y) respecto en $a'x'^2 + b'y'^2 + c'x'y' + d'x' + c'y' + f' = 0$ rotando los ejes en sentido antihorario utilizando la formula anterior de ángulos rotados y sabiendo que x = x'Cos Φ – y'Sen Φ y que y = x'Sen Φ + y'Cos Φ.

5.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: Una ecuación diferencial de orden n se denota $y^n + g_{n-1}(x)\, y^{n-1} + ... + g_1(x)\, y' + g_0(x)\, y = f(x)$ donde g_1, g_2, ..., g_n dominios comunes. Si f(x) = 0 esta función se le denomina como función homogénea en caso contraria es una función no homogénea. Se denomina solución de la ecuación diferencial lineal si la solución satisface cuando "y" y sus n primeras derivadas se sustituyen en la ecuación.
Toda ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tienen solución linealmente independiente si {y_1, y_2, ..., y_n } tienen solución linealmente independiente entonces la solución sería: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ esta es la solución general donde c es un numero real.
Sea {y_1, y_2, ..., y_n } un conjunto de funciones estas poseen n-1 derivadas en el intervalo I. El determinante w es el llamado wroskiano del conjunto de funciones dadas.
Para probar el que una ecuación diferencial es linealmente independiente se puede hacer por wroskiano. Este se hace si el wroskiano es diferente de cero (w ≠ 0).

5.3 ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO: La longitud (norma) de un vector de R^n es V=(v_1,v_2, ..., v_n) esta dada por:

$||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$ esta no puede ser negativa si el vector v = 1 este se llama vector unitario dos vectores U y V en R^n son paralelos si al vector V es múltiplo del vector U, es decir, si U = cV si c > 0 los vectores van a la misma dirección y si c < 0 van en dirección opuesta, la longitud de un múltiplo escalar se ve por la formula || cV || = | c | || V || donde | c | es el valor absoluto de c y c es un escalar.

El vector unitario de V es si $V \neq 0$ entonces $U = V / ||V||$ es de longitud uno y tiene la misma dirección de U+V se llama vector unitario en dirección de V este proceso se llama normalización del vector V.
La distancia entre dos puntos se llama normalización del vector V.

$d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$ y la distancia entre dos vectores en R^2 se encuentra .

$d(U,V) = || U - V || = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$ donde $U = (u_1 - u_2)$ y $V = (v_1 - v_2)$.

Las propiedades que cumple la distancia son:
$d(U , V) \geq 0$.
$d(U , V) = 0$ si solo si $U = V$.
$d(U , V) = d(V , U)$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores distintos de cero usamos la formula:
$\text{Cos } \Phi = (u_1v_1 + u_2v_2) / ||U||\ ||V||$ donde $U = (u_1, u_2)$ y $V = (v_1 , v_2)$ y donde $u_1v_1 + u_2v_2$ se denota como producto punto de dos vectores. El producto punto para R^n se denota $U \bullet V = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$ las propiedades que cumple son :
$U \bullet V = V \bullet U$
$U \bullet (V + W) = U \bullet V + U \bullet W$
$c (U \bullet V) = cU \bullet V = U \bullet cV$
$V \bullet V \geq ||V||^2$
$V \bullet V \geq 0$ y $V \bullet V = 0$ si solo si $V = 0$
Donde c es un escalar y que U, V, W son vectores cualesquiera en R^n.

5.4 DESIGUALDAD DE GAUCHY – SCHAWARZ: La desigualdad de Gauchy – Schwarz dice que $| U \bullet V | \leq || U ||\ || V ||$ donde $| U \bullet V |$ es valor absoluto de $U \bullet V$ donde U y V son vectores viendo esta desigualdad podemos definir el ángulo entre dos vectores en R^n así: $\text{Cos } \Phi = (U \bullet V) / (||U||\ ||V||)$ esta fórmula no define ángulos entre dos vectores, si $U \bullet V = 0$ se dice que los ángulos son ortogonales.

5.5 LA DESIGUALDAD DEL TRIANGULO: Dice si U y V son vectores entonces $||U+V|| \leq ||U||+||V||$.

5.6 EL TEOREMA DE PITÁGORAS: Este dice si U y V son vectores entonces $||U+V||^2=||U||^2 + ||V||^2$ solo para vectores ortogonales.
Un producto punto es un producto interno Euclidiano esto es un producto interno que se puede definir en R^2. para poder diferenciar el producto interior de otros posibles productos internos lo escribiremos $\langle U,V \rangle$ esto será el producto general para el espacio vectorial V.

Para solucionar un producto interno se procede igual que al definir un espacio vectorial en el acho de que debe cumplir con varios axiomas para poder calificar como producto interno estos axiomas son:
Siendo U, V, W vectores en V y c cualquier escalar:

$\langle U,V \rangle = \langle V,U \rangle$

$\langle U,V+W \rangle = \langle U,V \rangle + \langle U,W \rangle$ o $\langle U+V,W \rangle = \langle U,W \rangle + \langle V,W \rangle$

$c\langle U,V \rangle = \langle cU,V \rangle$

$\langle U,V \rangle \geq 0$ y $\langle U,V \rangle = 0$ si solo si $v = 0$

$\langle 0,V \rangle = \langle U,0 \rangle = 0$

Para definir la norma, distancia, ángulo de dos vectores que tenga producto interno:
Siendo U, V vectores en V:

Norma = ||U|| = √ $\langle U,V \rangle$

Distancia entre U, V = d$\langle U,V \rangle$= || U - V ||

Angulo entre vectores U, V diferentes de 0 cos Φ = $\langle U,V \rangle$ / (||U|| ||V||) donde 0 ≤ Φ ≤ π.

Dos vectores con producto interno son ortogonales si $\langle U,V \rangle$ = 0. El vector unitario de un vector con producto interno || U || = 1 el vector unitario en dirección de V donde U = V / || V || donde V ≠ 0. Para ver si U y V son vectores en el espacio con producto interno deben cumplir con las propiedades de norma:
|| U || ≥ 0.
|| U || = 0 si solo si U = 0.
|| cU || = | c | || U ||.
Y las propiedades de la distancia antes ya mencionadas.
Además cumplen con la desigualdad de Gauchy – Schawarz, desigualdad del triangulo y el teorema de Pitágoras antes yya explicadas.

5.7 PROYECCIONES ORTOGONALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO: Si U y V son vectores en el plano y V es diferente de 0 entonces este se puede proyectar ortogonalmente a U y se denota como

Proy_V U = [(U●V) / (V●V)]V

Proy_U V = [(U●V) / (U●U)]U donde U●V y V●V son el producto punto o producto interno Euclidiano.

Para en el espacio la proyección se denota como proy_v U = [$\langle U,V \rangle$ / $\langle V,V \rangle$]V ,

Proy_v U = [$\langle U,V \rangle$ / $\langle U,U \rangle$]U.

5.8 LA PROYECCIÓN ORTOGONAL Y DISTANCIA: Siendo U y V dos vectores en el espacio V con producto interno y V ≠ 0. Entonces la distancia d (U, proy_v) < d (U, cV) donde c ≠ $\langle U,V \rangle$ / $\langle V,V \rangle$.

5.9 CONJUNTOS ORTONORMALES Y CONJUNTOS ORTOGONALES: En un conjunto de vectores S de el espacio vectorial V es producto interno es ortogonal si cada vector de y seria espacio ortonormal si cada vector S es unitario.
Es ortonormal si < v_i, v_j > = 0 i ≠ j y || v_j || = 1 donde i = 1, 2, 3, ..., n y es ortonormal si < v_i, v_j > = 0 i ≠ j donde v_i, v_j pertenecen al conjunto s = { v_1, v_2, ..., v_n }
Un conjunto ortogonal es linealmente independiente si s es un conjunto de vectores diferentes de cero y que pertenecen al espacio v con producto interno.

5.10 PROCESO PARA ORTONORMALIZAR DE GRAM – SCHMIDT: Ver si la base tiene producto interno (como ya lo vimos).
Convertir la base a una base ortogonal.
Sea B = { v_1, v_2, ..., v_n }
$w_1 = v_1$
$w_2 = v_2 - \text{proy}_{w1} v_2$
$w_n = v_n - \text{proy}_{w1} v_3 - \ldots - \text{proy}_{w(n-1)} v_n$
B’ = { w_1, w_2, ..., w_n }
y para ortonormalizar $u_i = w_i / ||w_i||$ donde I = 1, 2, ..., n.
Donde B’’ = { u_1, u_2, ..., u_n } es un abase ortonormal.

5.11 APLICACIÓN DE LOS ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO: Producto cruz de dos vectores en el espacio:
Donde U = (u_1, u_2, ..., u_n)

$V = (v_1, v_2, ..., v_n)$

$$U \times V = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \end{bmatrix}$$

por el método de cofactores = $\begin{bmatrix} u2 & u3 \\ v2 & v3 \end{bmatrix}$i + $\begin{bmatrix} u1 & u3 \\ v1 & v3 \end{bmatrix}$j + $\begin{bmatrix} u1 & u2 \\ v1 & v2 \end{bmatrix}$k .

Las propiedades del producto cruz:
U x V = V x U
c (U x V) = c U x V = U x c V
U x U = 0
U x (V + W) = (U x V) + (U x W)
U x 0 = 0 x U
U (V x W) = (U x V) W
U x V son paralelos si U x V = 0.

5.12 APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS: Siendo f y g dos funciones en x y funciones continuas en un intervalo finito [a, b] entonces.

I = $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2$ dx siendo I = 0 si (f – g) $\rightarrow$ 0 esto se puede representar como :

$\langle f, g \rangle$ = $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2$ dx siendo I = $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2$ dx = $\langle f - g, f - g \rangle$ = || f – g || ^{2} esto significa que es equivalente minimizar || f – g || ^{2} y || f – g ||.

La aproximación de minimos cuadrados esta dada por:

g = $\langle f, w1 \rangle w_1 + \langle f, w2 \rangle w_2 + ... + \langle f, wn \rangle w_n$ siendo $w1 = w_1$ donde b = $\{w_1, w_2, w_3,\}$

CAPITULO 1

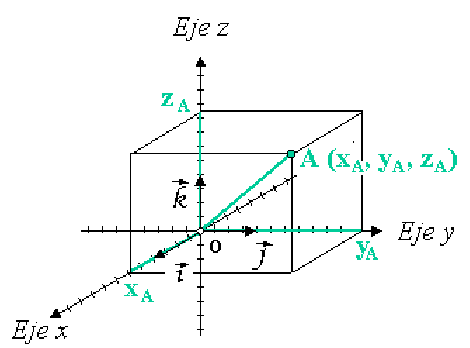
VECTORES

1.1. ESCALARES Y VECTORES

Una cantidad física que pueda ser completamente descrita por un número real, en términos de alguna unidad de medida de ella, se denomina una cantidad física escalar. Como veremos existen cantidades físicas que son descritas por más de un número, o por un número y otras propiedades. En particular los vectores se caracterizan por tener una magnitud, expresable por un número real, una dirección y un sentido. Sin embargo hay algo más que explicaremos.

1.2 SISTEMAS DE REFERENCIA

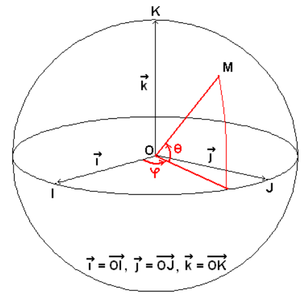
Para especificar la posición de un punto en el espacio, se utilizan sistemas de referencia. Esta posición se define en forma relativa a algún determinado sistema de referencia.



1.2.1. SISTEMA CARTESIANO

En un sistema de referencia cartesiano, existen tres ejes denominados ejes cartesianos X, Y, Z ortogonales que se intersectan en un punto O llamado origen del sistema

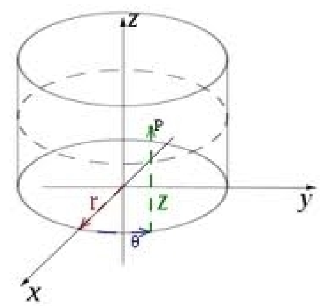
cartesiano. La posición de un punto respecto a ese sistema de referencia se define por el conjunto de sus coordenadas cartesianas (x, y, z), esto es mediante tres números,
Los rangos de variación de las coordenadas cartesianas son
$-\infty < x < \infty, \; -\infty < y < \infty, \; -\infty < z < \infty.$



1.2.2. SISTEMA ESFÉRICO DE COORDENADAS

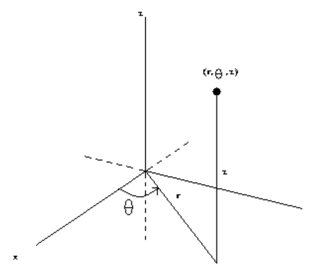
En el sistema esférico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas esféricas r, θ y φ, donde r es la distancia al origen, θ es el ángulo que forma OP con el eje Z y φ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY con el eje X.
Los rangos de variación de las coordenadas esféricas son
$0 \leqslant r < \infty, \; 0 \leqslant \theta < \pi, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$

1.2.3. SISTEMA CILÍNDRICO DE COORDENADAS



En el sistema cilíndrico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas cilíndricas ρ, z y φ, donde ρ es la distancia de la proyección del punto en el plano OXY al origen, z es la altura sobre el plano OXY y φ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY con el eje X. Los rangos de variación de las coordenadas cilíndricas son
$0 \leqslant \rho < \infty, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \; -\infty < z < \infty.$

1.2.4. SISTEMA POLAR DE COORDENADAS



En el sistema polar de coordenadas, la posición de un punto sobre un plano está definida por sus dos coordenadas denominadas polares, r y θ, donde r es la distancia del punto P al origen, θ es el ángulo que forma la línea OP con el eje X, llamado aquí eje polar. Los rangos de variación de las coordenadas polares son
$0 \leqslant r < \infty, \; 0 \leqslant \theta < 2\pi.$

2.2.5. RELACIONES ENTRE LAS COORDENADAS

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre las diversas coordenadas para los sistemas recién descritos

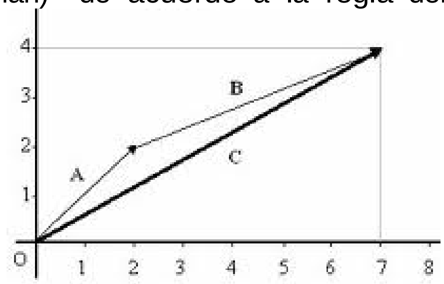
Cartesiano-esférico: $x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$
Cartesiano-cilíndrico: $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$
Polar-cartesiano: $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$

1.3. DESPLAZAMIENTOS EN EL ESPACIO

El concepto que dio lugar a los vectores, es el de desplazamiento. Considere un sistema de referencia respecto al cual esté definida la posición de puntos.
Definición 1.3.1: Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas varían con el tiempo.
Definición 1.3.2: Un desplazamiento se define como cualquier cambio de posición de un punto en el espacio
Este concepto básico de desplazamiento es en principio más elemental que el concepto de movimiento de un punto, puesto que no tiene relación con tiempos. Si un punto pasa de una posición A a otra posición B, se dice que el punto se ha desplazado de A a B. De su definición de desprende que un desplazamiento tiene tres características

- Su magnitud, que se define como la distancia entre el punto inicial y el punto final.
- Su dirección, correspondiente a la dirección de la recta AB. (rectas paralelas tienen la misma dirección)
- Su sentido, de A hacia B. Así el sentido del desplazamiento de B hacia A es contrario al desplazamiento de A hacia B.

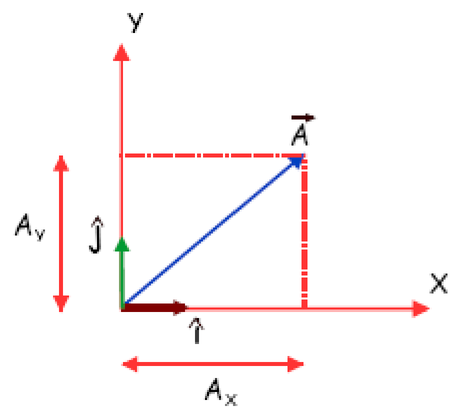
Además, desplazamientos sucesivos se combinan (o se suman) de acuerdo a la regla del triángulo, donde el desplazamiento A −→ B seguido del desplazamiento B −→ C es equivalente a un desplazamiento A −→ C



Eso queda absolutamente claro de la figura que define la regla de combinación triangular de desplazamientos. Esta regla se generaliza en la sección siguiente para dar origen al concepto de vector. Como veremos más adelante, para el caso de las fuerzas se utiliza la regla del paralelogramo en vez de la del triángulo para obtener la fuerza resultante. Ambas reglas son completamente equivalentes.

1.4. VECTORES

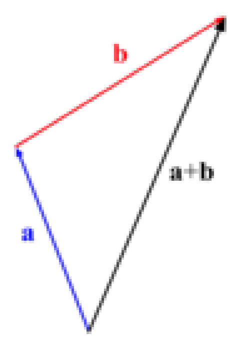
Los vectores son objetos que tienen las características de los desplazamientos, es decir que tienen magnitud, dirección, sentido, y tales que la combinación (llamada suma vectorial) de dos de ellos, se obtiene de acuerdo a la regla del triángulo indicada en la figura anterior. Obviamente un ejemplo de vectores son los desplazamientos. Otro ejemplo de vectores en Física, lo constituyen las fuerzas que se aplican a los cuerpos, tema del siguiente capítulo. Ellas poseen las tres características básicas, magnitud dirección y sentido. La cuestión de que si las fuerzas se combinan de acuerdo a la regla de suma vectorial, puede y es establecida experimentalmente para ciertas condiciones que explicaremos en el capítulo siguiente. Es decir debe establecerse que aplicar dos fuerzas dadas sobre un cuerpo es físicamente equivalente a aplicar una fuerza, llamada fuerza resultante que tiene la magnitud, dirección y sentido dada por la regla de adición vectorial.



Debemos señalar que no es suficiente que un objeto tenga magnitud, dirección, sentido para ser considerado un vector. Deben necesariamente combinarse como tales. Las rotaciones de los cuerpos, en torno a la dirección de un eje, en un sentido u otro, y de cierta magnitud (el ángulo), no son vectores porque no se combinan como los desplazamientos. En el capítulo sobre fuerzas veremos que siempre es posible cambiar los puntos de aplicación de fuerzas que actúan sobre un cuerpo indeformable a un determinado punto, allí sumarlas como vectores obteniendo la fuerza resultante, pero es en general necesario agregar el torque de las fuerzas que se cambiaron de posición respecto al punto donde se obtiene la resultante vectorial. Esta característica de las fuerzas no la poseen los desplazamientos.

1.4.2. SUMA DE VECTORES

Naturalmente solo podremos sumar vectores del mismo tipo: desplazamientos, fuerzas, otros, de modo que la regla de suma vectorial puede ser representada en cualquiera de las dos figuras siguientes, reglas conocidas como triangular y del paralelogramo.



1.4.3. MAGNITUD DE UN VECTOR

La magnitud de un vector •a será representada por |a| y a veces simplemente por a, y representa por ejemplo, para los desplazamientos la distancia entre el punto inicial y el final y para una fuerza, la magnitud de ella expresada en unidades de fuerza.

1.4.4. MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si •a es un vector y λ es un escalar (número real) definimos el producto de un escalar por un vector al vector **λ•a** que es un vector paralelo al vector a, de magnitud |λ| veces la magnitud de a, y del mismo sentido del vector a si $\lambda > 0$ y de sentido contrario si $\lambda < 0$.

1.4.5. VECTORES UNITARIOS

Al vector paralelo y del mismo sentido que el vector a, pero de magnitud unidad lo denotaremos por â. Entonces obviamente tenemos la siguiente importante relación a=|a| â,1

1.4.6. VECTORES UNITARIOS CARTESIANOS

Los vectores de magnitud unidad, paralelos y en el sentido positivo de los ejes cartesianos, los denotaremos por $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

1.4.7.COMPONENTES CARTESIANAS DE UN VECTOR

Todo vector F (en tres dimensiones), puede ser escrito como $F = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = (F_x, F_y, F_z)$, donde F_x, F_y, F_z se denominan componentes cartesianas del vector. Hemos señalado además una notación alternativa para denotar un vector como un trío ordenado formado por sus tres componentes (F_x, F_y, F_z).

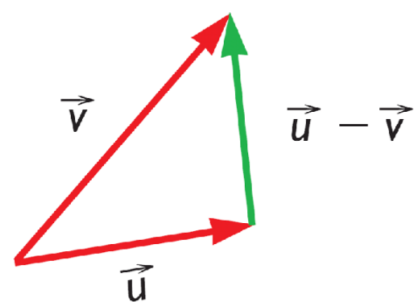
2.4.8. VECTOR NULO

Un vector de magnitud cero, se denomina vector nulo y lo indicaremos por •0.

2.4.9. RESTA DE VECTORES

Se define al vector diferencia u – v = u + (-v) que pasa a ser un caso especial de suma de vectores como se ilustra en la figura.

Note que para realizar las operaciones descritas los vectores pueden desplazarse libremente a líneas paralelas, pues corresponden a la misma dirección, siendo necesario mantener su magnitud y su sentido.



2.4.10. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dados dos vectores a y b, se define el producto escalar de ellos al número real $a.b = IaI.IbIcos\alpha = ab\cos\alpha$, siendo α el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores.

2.6. DE ACTUALIDAD

El concepto de vector que se generó mediante una generalización del sim- ple concepto de desplazamiento y las formas en que los desplazamientos se combinan ha debido en algunos casos abandonarse y en otros casos generalizarse. El concepto de vector realmente tiene aplicabilidad e importancia en los llamados espacios planos o **Euclideanos.** En espacios curvos es complejo sino imposible hablar de dirección, puesto que dirección es un conjunto de líneas paralelas. ¿Qué son líneas paralelas en un espacio curvo, por ejemplo la superficie de una esfera?

En un espacio plano si se hacen tres desplazamientos paralelos regresando al punto de partida, el cuerpo queda tal como empezó. En un espacio curvo no ocurre eso. En la formulación de su teoría de **la Relatividad General Albert Einstein** que involucra espacio-tiempo curvo, se ve obligado a utilizar "Tensores"para su formulación. En la vecindad de cada punto del espacio tiempo, allí este se puede aproximar por un espacio tiempo plano y allí podríamos usar vectores. Como un ejemplo de lo que hablamos, en un espacio plano una partícula libre se mueve de acuerdo a $\bullet r(t) = \bullet r(0) + \bullet vt$.

Si se trata del movimiento de una partícula en un espacio tiempo curvo las cosas son diferentes. Primero, el espacio tiempo tiene una curvatura causada por la presencia de cuerpos con masa. Una partícula moviéndose no sometida a alguna de las otras tres fuerzas (electromagnética, nuclear o débil), partícula en **caída libre**, define lo que se denomina sistema inercial de referencia. La partícula se moverá en una geodésica del espacio-tiempo.

TALLER 1

A. EJERCICIOS

Con los vectores a=(3,5), b=(-2,4), c=(1,-3) y d=(-3,-5):

1. Grafíquelos en el plano cartesiano
2. Realice gráficamente las siguientes operaciones:
   1. a+b
   2. b+c
   3. 2c-a
   4. 3d+2b-c
   5. a-2b+c
   6. -c-a+b-2d
   7. –d+3c+a
   8. 3c+a-3d
3. Realice teóricamente las siguientes operaciones:
   1. a+b+c
   2. 2b+d
   3. –a+3c-4a
   4. -d+4b-5c
   5. 3a-4b+2c
   6. -3c+b-6d
   7. 3c+5a+d
   8. -5c+a-4d

B. PROBLEMAS

1. Desde una determinada posición en un camino, una persona observa la parte más alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 25^o. Si avanza 45 m en línea recta hacia la base de la torre, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de 55^o. Considerando que la vista del observador está a 1,7 m. Determine la altura h de la torre.
2. Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura de 2500 m, el piloto observa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical con ángulos de depresión de $62^o 24'$ y $37^o 18'$ respectivamente. Encuentre la distancia x entre las embarcaciones.
3. Una persona se encuentra en la mitad de la distancia que separa dos edificios y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación de 30^o y 60^o respectivamente. Demuestre la que las alturas de los edificios están en la relación 1:3.
4. Un mástil por efecto del viento se ha quebrado en dos partes, la parte que quedó vertical en el piso mide 3 m y la parte derribada quedó atada al extremo superior de la parte vertical, formando un ángulo de 30º con el piso. Encontrar la altura del mástil.
5. Una persona en su trote diario, desde su casa, corre 7 km al Norte, 2 km al Oeste, 7 km al Norte y 11 km al Este. Encuentre la distancia a su casa a que se encuentra la persona.
6. Una caja tiene 16 cm de largo, 18 cm de ancho y 10 cm de alto. Encuentre la longitud de la diagonal de la caja y el ángulo que ésta forma con cada uno de los ejes.

Capitulo 2

MATRICES Y DETERMINATES

1. MATRICES

Las **matrices** aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J.J. Sylvester. El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en 1853. En 1858, A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Las matrices se utilizan en el **cálculo numérico**, en la **resolución de sistemas de ecuaciones lineales**, de las **ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales**. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial dn los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos,...

Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$ dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma A =(a_{ij}), con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

1.1 ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de los que es conveniente recordar su nombre.

1.1.1 SEGUN A LA FORMA

- **Matriz fila:** Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden **1´n**.
- **Matriz columna:** Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden **m ´1**.
- **Matriz cuadrada:** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir **m=n**. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n ´ n.
  Los elementos a_{ij} con i **=** j, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos a_{ij} con i + j **=** n +1 la diagonal secundaria.
- **Matriz traspuesta:** Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t, la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.
  De la definición se deduce que si A es de orden m ´ n, entonces A^t es de orden n ´ m.
- **Matriz simétrica:** Una matriz cuadrada A es simétrica si A = A^t, es decir, si a_{ij} = a_{ji} " i, j.

- **Matriz antisimétrica:** Una matriz cuadrada es antisimétrica si A = –At, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$ " i, j

1.2.2 SEGUN LOS ELEMENTOS

- **Matriz nula:** Es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por **0**.
- **Matriz diagonal:** Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.
- **Matriz escalar:** Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales.
- **Matriz unidad** o **identidad:** Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.
- **Matriz Triangular:** Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:
- **Triangular Superior:** Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, a_{ij} =0 " i<j.
- **Triangular Inferior:** Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, a_{ij} =0 "j<i.

1.2 SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES

La suma de dos matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $S=(s_{ij})$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión.
La suma de las matrices A y B se denota por A+B.

1.2.1 PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa)
A + B = B + A (propiedad conmutativa)
A + 0 = A (0 es la matriz nula)
La matriz –A, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A, ya que A + (–A) = 0.
La diferencia de matrices A y B se representa por A–B, y se define como: A–B = A + (–B)

1.3 PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número real k es otra matriz $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k, es decir, $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$.
El producto de la matriz A por el número real k se designa por k·A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

1.3.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

k (A + B) = k A + k B (propiedad distributiva 1ª)
(k + h)A = k A + h A (propiedad distributiva 2ª)
k [h A] = (k h) A (propiedad asociativa mixta)
1·A = A (elemento unidad)

1.4 PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B, su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplacando las filas de A por las columnas de B. De manera más formal, los elementos de P son de la forma:

$$p_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión **m´ n** y B dimensión **n´ p**, la matriz P será de orden **m´ p**. Es decir:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

1.4.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

A·(B·C) = (A·B)·C
El producto de matrices en general no es conmutativo. (**Ejemplo**)
Si A es una matriz cuadrada de orden **n** se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $\mathbf{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por $\mathbf{A}^{-1}$.
El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir: **A·(B+C)=A·B+A·C**

1.4.2 CONSECUENCIAS DE LAS PROPIEDADES

Si A·B= 0 no implica que A=0 ó B=0. (**Ejemplo**)
Si A·B=A·C no implica que B = C. (**Ejemplo**)
En general $(A+B)^2$ ¹ $A^2 + B^2$ +2AB,ya que A·B ¹ B·A.
En general (A+B)·(A–B) ¹ $A^2 – B^2$, ya que A·B ¹ B·A.

2. DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante de A, y se representa por |A| ó det(A), al número:

$$|A| = \sum_{\sigma} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$, con $\sigma \in S_n$

(S_n es el grupo de las permutaciones del conjunto {1, 2,.. *n*}, e *i*(s) es la signatura de la permutación)
También se suele escribir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.1 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ÓRDENES 1, 2 Y 3

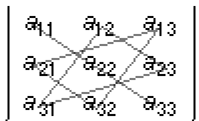
Es fácil comprobar que aplicando la definición se tiene: $A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

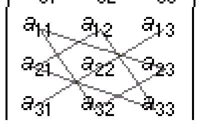
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

En este último caso, para acordarnos de todos los productos posibles y sus correspondientes signos se suele usar la Regla de Sarrus, que consiste en un esquema gráfico para los productos positivos y otro para los negativos:



(Para los tres productos positivos).



(Para los tres productos negativos).

2.1.1 CÁLCULO DE UN DETERMINANTE POR LOS ADJUNTOS DE UNA LÍNEA

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una submatriz $\mathbf{M_{ij}}$ que recibe el nombre de **matriz complementaria del elemento a_{ij}.**

Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

La matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en la matriz A la fila 1 y la columna 1; es decir:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Llamamos menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la matriz complementaria del elemento a_{ij} , y se representa por a_{ij}

Se llama **adjunto de a_{ij}** , y se representa por por $\mathbf{A_{ij}}$, al número $(-1)^{i+j}a_{ij}$.

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos.

Por ejemplo, si desarrollamos un determinante de orden *n* por los adjuntos de la 1ª fila se tiene:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

La demostración es muy fácil, basta con aplicar la definición de determinante a ambos lados de la igualdad.

Nota: Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros

2.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa línea los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.
  det (L1 + L'1, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + det (L'1, L2, L3...)
- Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.
  det (k·L1, L2, L3...) = k·det (L1, L2, L3...)
- Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces se verifica:
  det (A·B) = det (A) · det (B)
- Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial:
  det (L1, L2, L3...) = -det (L2, L1, L3...)
- Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.
  det (0, L2, L3...) = 0
- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale cero.
  det (L1, L1, L3...) = 0
- Si dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante se anula.
  det (L1, k·L1, L3...) = 0
- Si una fila (columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero.
  det (L1, L2, a·L1 + b·L2...) = 0
- Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.
  det (F1 + F2, F2, F3) = det (F1, F2, F3) + det (F2, F2, F3) = det (F1, F2, F3)
- Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía.
  det (L1 + k· L2, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + det (k·L2, L2, L3...) = det (L1, L2, L3...) + 0

2.3 CÁLCULO DE DETERMINANTES POR EL MÉTODO DE GAUSS

Se conoce cómo método de Gauss a un método para facilitar el cálculo de determinantes usando las propiedades de éstos. Dicho método consiste en hallar un determinante equivalente (con el mismo valor) al que se pretende calcular, pero triangular. De esta forma el problema se reduce a calcular un determinante de una matriz triangular, cosa que es bastante fácil usando las propiedades de los determinantes.

Para conseguir triangularizar el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

Permutar 2 filas ó 2 columnas.

Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.

Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

3. APLICACIÓN DE LAS MATRICES Y LOS DETERMINANTES A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales (s.e.l.) es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i son los términos independientes.

3.1 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UN S.E.L.

El anterior sistema se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De modo simplificado suele escribirse $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$, donde la matriz A de orden m x n se denomina matriz de coeficientes.

También usaremos la matriz ampliada, que representaremos por A’, que es la matriz de coeficientes a la cual le hemos añadido la columna del término independiente:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

TALLER 2

Resuelva los siguientes sistemas por DETERMINANTES

A. SISTEMAS 2X2

1. $5X + 7Y = 50$
   $9X + 14Y = 97$
2. $10X + 3Y = 23$
   $5Y - 2X = 1$
3. $2X + 5Y = 1$
   $6X + 7Y = 3$
4. $7X - 3Y = 23$
   $3X + 4Y = 31$
5. $12X - 13Y = 9$
   $-4X + 17Y = 35$
6. $3X + 4Y = 43$
   $4X + 7Y = 69$
7. $7X + 3Y = 100$
   $3X - 7Y = 20$
8. $8X - 15Y = -30$
   $2X + 3Y = 15$
9. $8X - 5Y = 49$
   $7X + 15Y = 101$
10. $7X + 2Y = 42$
    $3X - 2Y = 1$
11. $5X - 7Y = -4$
    $9X + 11Y = 40$
12. $X + Y = 100$
    $X - Y = 12$

B. SISTEMAS 3X3

1. $\begin{cases} X - 3Y = 1 \\ 9Y - Z = 1 \\ 2X - Z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2X + Y = 3 \\ 4X - Y = 3 \\ -X + Y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2X + Y = 1 \\ -X + 2Y = 7 \\ 3X + Y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ 2X + 3Y - 4Z = 9 \\ X - Y + Z = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3X + 2Y + Z = 1 \\ 5X + 3Y + 4Z = 2 \\ X + Y - Z = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} X - 2Y + 3Z = 2 \\ 2X - 3Y + Z = 1 \\ 3X - Y + 2Z = 9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} X - 2Y - 3Z = 3 \\ 2X - Y - 4Z = 7 \\ 3X - 3Y - 5Z = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} X - 2Y - 3Z = -2 \\ 2X - 4Y + Z = -4 \\ 3X + Y + Z = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} X + Y + Z = 4 \\ X - 2Y + 3Z = 13 \\ X + 3Y + 4Z = 11 \end{cases}$