ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Las estructuras algebraicas nacieron en la Matemática moderna como una herramienta propia de las matemáticas puras. Pero muy pronto encontraron aplicaciones fundamentales en otras ciencias, como la Física o la Química.

A. NÚCLEOS TEMÁTICOS

PRELIMINARES, OPERACIONES INTERNAS Y GRUPOS

- Relaciones
- Propiedades de las relaciones
- Leyes de composición interna
- Los enteros
- Teoría de grupos
- Estructuras algebraicas
- Grupos: Generalidades
- Orden de grupo
- Propiedades elementales de los grupos

SUBGRUPOS Y ANILLOS

- Subgrupo generado por un elemento
- Congruencia modulo n subgrupo
- Clases laterales según n subgrupo
- Subgrupos normales
- Morfismo
- Isomorfismo
- Anillos

B. BREVE RESEÑA

Recurrir a **estructuras** para estudiar determinados procesos, además de que conlleva siempre unas ciertas dosis de abstracción, es una técnica que no compite sólo a las Matemáticas. Es, hasta cierto punto, un proceso natural en los mecanismos de reflexión. Cuando se estudian las posibles reacciones de un grupo de personas ante determinados estímulos se está intentando establecer una estructura de pautas de comportamiento que se pueda aplicar en condiciones similares. En la medida en que las ciencias dejan de ser observacionales y se aproximan más a las llamadas Ciencias Básicas, no sólo se refina el nivel de abstracción, sino que el rigor con el que se definen las estructuras también aumenta. El **Álgebra Clásica** fue una ciencia que estudiaba los números y las relaciones que se establecían entre ellos por medio de diferentes operaciones. El Álgebra Abstracta estudia relaciones entre elementos cualesquiera por medio de operaciones abstractas.

Vamos a resolver un par de problemas:

Problema 1. "Tenemos un cesto con 5 manzanas. Viene un amigo y deposita 3 manzanas más en el cesto ¿Cuántas manzanas hay ahora?
Solución: 5 + 3 = 8 manzanas

Problema 2. En nuestro monedero tenemos 5 euros. Compramos un regalo que nos cuesta 2 euros ¿Cuánto nos queda en el monedero?
Solución: 5 -2 = 3 euros

Reconozco que no hay que ser un experto matemático para resolver estos problemas y que incluso el calificativo de problema le puede parecer excesivo a más de una persona. Los matemáticos tienen un recurso lingüístico para estos casos, lo llaman ejercicio.
Pero no vayamos tan deprisa y reflexionemos un momento. Para un niño de, por ejemplo, 4 años, estos dos enunciados sí pueden representar y de hecho representan, un problema. En primer lugar no hace tanto tiempo que ha aprendido que el número 5 puede representar indistintamente a manzanas, a euros, a árboles o a personas, con lo cual se supone que ya ha asimilado el llamado primer nivel de abstracción de las Matemáticas. Un número es en sí mismo un concepto abstracto. Y esta simple abstracción, que debemos realizar todos los seres humanos que vivimos en sociedades organizadas, conlleva, junto con el aprendizaje de la escritura y la lectura, uno de los mayores esfuerzos intelectuales que realizamos a lo largo de nuestra vida. Y por la misma regla de tres, las operaciones que conllevan estos dos problemas no son exclusivas del tráfico de manzanas, ni de euros, sino que se aplican también de forma abstracta a los números. De manera que, en principio, operaciones como $3 + 8 = 11$ o $25 - 5 = 20$ las puede realizar cualquiera que conozca los números y las reglas básicas de la suma y la resta. Lo que ya no está tan claro es que pueda realizar la siguiente operación $5 - 25 = ?$

Haga una prueba entre la gente que conoce y se llevará una sorpresa. No le ponga literatura al problema. Si partimos de un cesto con 5 manzanas y le proponemos quitar 25 le dirá que no es posible y tendrá razón. Otra cosa es si le planteamos aquellos números de su cuenta bancaria que tienen color rojo. Y es que la introducción en Europa de los números negativos, que data de finales del siglo XVI, no arraigó plenamente hasta muy avanzado el siglo XIX en todos los estratos sociales (y en algunas personas parece que todavía no lo ha hecho).
Una vez asumido que existen números positivos y negativos (y un extrañísimo número denominado "cero" que se representa mediante una redonda más o menos alargada: 0), lo correcto es plantear la operación anterior en los siguientes términos: $5 + (-25) = -20$
A partir de aquí podemos hacer una serie de experimentos curiosos, como
$3 + 2 = 2 + 3$; $2354 + 578490 = 578490 + 2354$
$58 + 0 = 58$; $0 + 15 = 15$
$30 + (-30) = 0$ $2500 + (-2500) = 0$
Y uno algo más complicado, pero muy interesante $2 + (4 + 5) = (2 + 4) + 5$

Es interesante porque le permite sumar más de dos números haciendo, como en el caso anterior, primero $2 + 4 = 6$ y entonces sumar 5, o bien hacer primero $4 + 5$ y al resultado sumarle 2. En cualquiera de los dos casos el resultado es el mismo: 11. Si esto pasa siempre (y estamos en condiciones de garantizar que así es) no importa el sistema que elija, porque el resultado será válido.
Vamos ahora a resumir los resultados que hemos obtenido de nuestras experiencias con la suma de números enteros.

1. cuando hacemos una suma con más de dos sumandos, los podemos asociar de la forma que queramos que el resultado siempre será el mismo
2. Existe un número entero, al que hemos bautizado como "cero", que tiene la propiedad de dejar inalterada la suma, en el sentido de que $3 + 0 = 3$
3. Para cualquier número entero que tomemos, por ejemplo el 5, existe siempre otro entero -5, que al sumarlo con el anterior nos da el "cero": $5 + (-5) = 0$. Otro ejemplo: dado el número -7 existe otro que es 7 tal que $-7 + 7 = 0$.

Si hiciéramos un experimento muy parecido a éste pero con la multiplicación de números racionales (es decir, haciendo intervenir los quebrados) llegaríamos a comprobar que tenemos tres propiedades muy parecidas a las anteriores:

- Para multiplicar tres números los podemos asociar de la forma que queramos: $(2\cdot3)\cdot5=2\cdot(3\cdot5)$ ya que $6\cdot5=2\cdot15= 30$
- Existe un número racional, el 1, que deja inalterada la multiplicación $1\cdot7 = 7$

- Dado un número racional cualquiera, por ejemplo el 8, existe siempre otro al que llamamos inverso, en este caso 1/8, tal que al multiplicarlos dan como resultado el 1: 8·1/8=1

Podríamos seguir poniendo ejemplos con otras operaciones en las que ni siquiera intervienen números, como la composición de movimientos en el plano, la suma de vectores o de matrices, que cumplen estas tres condiciones.

NIVEL DOS

Cuando se sustituyen los números por letras se entra en el segundo nivel de abstracción. La propiedad asociativa a la que hemos hecho referencia en el apartado anterior la podríamos haber expresado de la forma (a + b) + c = a + (b + c) siendo a, b y c números enteros en el caso de la suma de números enteros, o bien a·(b·c) = (a·b)·c en el caso del producto de números racionales.
Cuando utilizamos letras, éstas u otras cualesquiera, lo que queremos decir es que la propiedad se cumple para números cualesquiera, bien sean enteros o racionales. Al hacer esto entramos en el llamado segundo nivel de abstracción, algo que en la enseñanza suele ocurrir entre los trece y los catorce años. También quiere decir que el alumno se está introduciendo en una asignatura que se llama Álgebra, o en algunos casos Álgebra Abstracta, aunque este último apelativo asusta a mucha gente, aunque no tendría por qué.
No hay que olvidar que el lenguaje es ya en sí mismo una abstracción. Cuando decimos “árbol” no nos estamos refiriendo a un árbol en concreto, sino a toda una categoría de entes que pueden recibir ese nombre. Cuando en gramática hablamos de un adjetivo calificativo, sin hacer una mención específica, es decir, sin concretar en adjetivos como blanco, feo o bueno, estamos haciendo una abstracción con la intención de referirnos a una cierta categoría gramatical para establecer unas determinadas reglas, algo totalmente análogo a lo que hacemos en Matemáticas cuando establecemos el tercer nivel de abstracción.

NIVEL TRES

Ahora, en vez de referirnos a un conjunto concreto de números, como los enteros o los racionales, vamos a hablar de un conjunto A cualquiera, en abstracto, que tiene una serie de elementos a los que llamaremos a, b, c, …, sin especificar nada más, ni siquiera sin en número finito o infinito. Consideraremos que entre ellos se ha definido una operación que simbolizaremos con el signo *. Pondríamos haber elegido cualquier otro, como $ o ^, o incluso uno que nos hubiéramos inventado ahora mismo. No importa. El caso es no utilizar signos como + por el simple hecho de evitar que nadie pueda confundir una operación completamente abstracta con una concreta y conocida como la suma de números. Alguien podría objetar que esto son ganas de complicar las cosas, pero debemos pensar en la posibilidad de que el conjunto A esté formado por camisetas y la operación * haga referencia a una compleja operación financiera en el ámbito de los mercados internacionales.
Lo que sí vamos a exigir, en este primer ejemplo, es que la operación sea cerrada. Esto quiere decir que si a y b son elementos de A, el resultado de hacer a*b también sea un elemento de A. De lo que se trata es de que, al operar una camiseta con otra camiseta, queremos que el resultado sea también una camiseta y no un paquete de tabaco, pero vamos a poner un ejemplo más matemático. Supongamos que consideramos el conjunto de todos los números impares. La operación “suma” definida en dicho conjunto no es una operación cerrada, ya que la suma de dos números impares no es nunca un número impar.

Diremos que la operación * definida en el conjunto A cumple la propiedad asociativa si (a*b)*c=a*(b*c) sean cuales sean los elementos a, b, c de A.
Llamaremos “elemento neutro” de esta operación, a un elemento e que también sea de A tal que se cumpla: e * a = a * e = a y al que llamaremos elemento inverso
De la misma forma diremos que a^{-1} es elemento inverso de a si se cumple que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

De momento, no hemos exigido que la operación sea conmutativa, es decir, que se puedan cambiar el orden de los factores sin que cambie el resultado de la operación, pero sí es una exigencia que debe hacerse tanto al elemento neutro como al inverso.

Siempre que tengamos un conjunto A y una operación * definida en él (cerrada) que cumpla con estas tres condiciones

1. Asociativa
2. Existencia de un elemento neutro
3. Existencia, para cada elemento del conjunto A, de un elemento inverso

Diremos que el par (A,*) definen una estructura de grupo. Forman un grupo, por ejemplo, el conjunto de los números enteros con la operación suma. En el párrafo anterior hemos tenido ocasión de comprobar que se verificaban todas las propiedades necesarias para que esto se cumpla. Es un grupo que se suele denotar con el símbolo (Z, +) ya que Z es la letra que se acostumbra a utilizar para designar al conjunto de los números enteros. Es importante recalcar que un grupo es una estructura formada por dos entidades, un conjunto y una operación. No tiene sentido, por ejemplo, decir que Z es un grupo, sin hacer referencia a la operación en cuestión, ya que el mismo conjunto Z con la operación producto no forma un grupo (sus elementos no tienen inverso para el producto, ya que no están incluidos los quebrados).
Cuando además de las tres propiedades anteriores se cumple una cuarta que dice que a * b = b * a para cualesquiera elementos a y b del conjunto A, se dice que el grupo es conmutativo. (Z, +) es un grupo conmutativo.

C. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Un **grupo** es una **estructura algebraica**. En Matemáticas están definidas muchas estructuras algebraicas, como **grupos, anillos ideales, módulos, cuerpos o espacios vectoriales**, por mencionar algunas. La mayoría de ellas, a diferencia de los grupos, tienen definida más de una operación. Vamos a ver, por ejemplo, cómo es la **estructura de anillo**.

Un **anillo** es un conjunto en el que hay definidas dos operaciones internas (A, $, o) (insistimos en que la elección de símbolos para las operaciones es totalmente arbitraria) y que cumple las siguientes propiedades:

1. Respecto a la primera operación $ es **un grupo conmutativo**.
2. La segunda operación es **asociativa**, es decir, que para cualesquiera tres elementos a, b, c de A se cumple que: (a o b) o c = a o (b o c)
3. La operación o es **distributiva** sobre $. Lo que significa que se cumple que a o (b $ c) = a o b $ a o c

El conjunto de los números enteros con las operaciones de suma y producto son un ejemplo de anillo que se simboliza como (Z, +, ·). Ya hemos comprobado antes que la suma de enteros forma un grupo conmutativo. Por otro lado, sabemos que el producto de enteros es asociativo. Recordemos que esto significa que 3· (4·8) = (3·4)·8 es decir que 3·32 = 12·8
Y por último, la aplicación distributiva en este caso sería 2(4 + 6) = 2·4 + 2·6 que sabemos que la cumplen todos los números enteros.

HISTORIA

Históricamente la primera estructura algebraica que surgió fue la de grupo. Aunque en la idea básica ya habían trabajado en el siglo XVIII J**oseph Louis Lagrange** (1736-1813) o **Paulo Rufini** (1765-1822), fue **Evariste Galois** (1811-1832) el primero en utilizar el término “grupo” en un contexto muy concreto que era el de “grupo de sustituciones”. A pesar de que dicho grupo con la operación composición cumple con las propiedades que debe tener un grupo, en el sentido que lo hemos definido antes, Galois empleó el término grupo como sinónimo de conjunto. El primero en plantearse la noción de grupo como idea abstracta, susceptible de ser estudiado como estructura y que se pudiera aplicar a diferentes tipos de elementos algebraicos fue **Arthur Cayley** (1821-1895). En un trabajo titulado **“On the Theory of Goups”**, publicado en 1854 en el *Philosophical Magazine*, plantea una operación entre elementos abstractos cuyo resultado permanece en el interior del mismo “grupo” de elementos. Hay que tener en cuenta que entonces todavía no se utilizaba ni el concepto ni la nomenclatura propia de la Teoría de Conjuntos de la que nos valemos actualmente para definir todos estos conceptos. Cayley utilizaba símbolos como 1, α, β,… con la idea de que no se asociaran a elementos concretos. La operación quedaba definida mediante una tabla. Mediante dichas tablas y operaciones construidas con conjuntos de seis elementos, Cayley llegó a la conclusión de que existían dos grupos fundamentales de seis elementos.

El concepto de anillo fue introducido indistintamente por **Richard Dedekind** (1831-1916) y **Leopold Kronecker (**1821-1891). Este último los llamaba “Orders”. El nombre de anillo fue utilizado por primera vez por **David Hilbert** en 1897 en un trabajo titulado “The Theory of Algebraic Nimber Fields”. La existencia de grupos como estructura algebraica allanó el terreno para la creación de los anillos, que en el fondo no son más que conjuntos en los que se ha definido un par de operaciones cerradas que mantienen la estructura de grupo o alguna de sus propiedades. En su sentido abstracto, el concepto de anillo fue introducido por **Abraham Fraenkel** (1891-1965) en 1914, pero con una formulación muy diferente de la que usamos actualmente. Fue en 1917, gracias al importante trabajo de **Emma Noether** con su “Teoría de ideales en Anillos”, cuando el concepto se extendió por la comunidad matemática. Muchos historiadores de la Matemática coinciden en valorar los teoremas de Noether en el campo del Álgebra Abstracta, como lo fueron en su momento los de **Euclides** en el campo de la **Geometría**.

En general, las estructuras algebraicas representan conceptos cuyas aplicaciones trascienden con mucho el mero ámbito de las **Matemáticas puras**. Sus aplicaciones han sido de vital utilidad para muchas rama de la **física**, la **química** y muy especialmente en la **informática**. En el establecimiento teórico de la relatividad y del surgimiento de la Mecánica Cuántica no hubieran podido levantar su edificio teórico sin la ayuda de la **Teoría de Grupos**.

UN GRUPO MUY PEQUEÑO

Los grupos pueden ser **finitos o infinitos**. Los grupos que hasta ahora hemos puesto como ejemplo se encontraban entre los segundos, como el grupo formado por los números enteros con la operación suma o el de los racionales con la operación producto. Entre los grupos que tienen un número finito de elementos los más pequeños son los que tienen sólo dos elementos. Si llamamos a los elementos α y β y simbolizamos la operación con el signo ^, su tabla sería

^	α	β
α	α	β
β	β	α

La propiedad asociativa se cumple por el hecho de que no puede no cumplirse, ya que al haber sólo dos elementos no cabe la posibilidad de operar entre sí a tres de ellos.
El elemento neutro es α, ya que α ^ β = β ^ α = β

También cada elemento tiene su inverso: el inverso de α es α y el inverso de β es β. Además es un grupo conmutativo. Se trata de un grupo con más “caché” del que podría parecer a primera vista, ya que a y b pueden ser sustituidos por los bits informáticos 0 y 1, con todo lo que ello supone.
En realidad, el grupo más pequeño que existe es el formado por un único elemento que es a su vez elemento neutro e inverso de sí mismo, pero debido a su absoluta falta de interés no se suele considerar cuando se habla de grupos. Los matemáticos lo denominan el grupo trivial.

LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Desde hacía mucho tiempo, los **chinos** utilizaban bastoncillos de bambú o de madera para representar los números y realizar, en especial, cálculos comerciales de una manera práctica, pero también para tratar cuestiones relacionadas con los aumentos y disminuciones de **magnitudes**, o

con distancias recorridas en sentidos opuestos; esos bastoncillos eran negros o rojos según que representaran cantidades positivas o negativas, de acuerdo con una atribución del color que es justamente la opuesta a la empleada en la contabilidad occidental.
Los matemáticos **hindúes** del siglo VI mencionan también el uso de números negativos para tratar este tipo de problema. Los antiguos griegos, por el contrario, rechazaron que pudieran existir tales números.
En Europa medieval, los árabes dieron a conocer los números negativos de los hindúes, que en el siglo XII se utilizaban ya ocasionalmente para designar las pérdidas en el análisis de cuestiones financieras. Durante el **Renacimiento**, el manejo práctico de esos números en la contabilidad y otros contextos ayudó a su lenta introducción en las matemáticas.
El alemán Michael Stifel (1487-1567), monje agustino convertido al protestantismo y amigo personal de Lutero, fue uno de los primeros en admitir el uso de coeficientes negativos para el estudio de las ecuaciones cuadráticas y divulgó el uso del signo menos "—"para designar la resta; de hecho, los signos + y — estaban ya en uso entre los comerciantes alemanes del siglo XV para indicar el exceso o el defecto de mercancías en los almacenes. Con todo, la consideración de las cantidades negativas como correspondientes a números matemáticamente legítimos alcanzó aceptación general hasta el siglo XVIII, cuando los **números negativos** empezaron a ser entendidos como opuestos de los positivos.
En la matemática moderna el conjunto de los números enteros (Z) abarca todos los enteros tanto negativos como positivos, y llega hasta el infinito hacia ambos lados de una recta numérica, por tanto, en rigor **no existe un comienzo**, salvo que como tal se considere el **CERO** (el cual agregado al conjunto de los números naturales forma el conjunto de los Cardinales).

A. OPERACIONES EN Z (CON ENTEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS)

Para poder realizar las operaciones en el conjunto de los números enteros (Z) debes **memorizar** las siguientes reglas (son fáciles; sólo requieren de práctica).

1. Suma en Z (Conjunto de Números Enteros positivos y negativos):

Existen únicamente dos casos: **números de igual signo** y **números con signo distinto**. Las reglas a memorizar son las siguientes:

a. **Números de igual signo**: Cuando dos números tiene igual signo se debe **sumar y conservar el signo**.
   Ejemplos: $-3 + -8 = -11$ (sumo y conservo el signo)
   $12 + 25 = 37$ (sumo y conservo el signo)

b. **Números con distinto signo**: Cuando dos números tienen distinto signo se debe **restar y conservar el signo del número que tiene mayor valor absoluto** (recuerda que el valor absoluto son unidades de distancia, lo cual significa que se debe considerar el número sin su signo).
   Ejemplo: $-7 + 12 = 5$ (tener 12 es lo mismo que tener +12, por lo tanto, los números son de distinto signo y se deben restar: $12 - 7 = 5$ ¿con cuál signo queda? El valor absoluto de –7 es 7 y el valor absoluto de +12 es 12, por lo tanto, el número que tiene mayor valor absoluto es el 12; debido a esto el resultado es un número positivo).
   $5 + -51 = -46$ (es negativo porque el 51 tiene mayor valor absoluto)
   $-14 + 34 = 20$

2. Resta en Z

Para restar dos números o más, es necesario realizar **dos cambios de signo (uno después del otro)** porque de esta manera **la resta se transforma en suma** y se aplican las reglas mencionadas anteriormente. Son dos los cambios de signo que deben hacerse:

a. Cambiar el signo de la **resta** en **suma** y

b. Cambiar el signo del número que está a la **derecha del signo de operación** por su **signo contrario**

Ejemplo: –3 – 10 = –3 + – 10 = –13 (signos iguales se suma y conserva el signo)
19 – – 16 = 19 + $^{+}$16 = 19 + 16 = 35

3. Multiplicación y División en Z

La regla que se utiliza es la misma para multiplicar que para dividir. ¿CÓMO SE HACE? Multiplico los números y luego multiplico los signos de acuerdo a la siguiente tabla:

+ • + = +
– • – = +
+ • – = –
– • + = –

Ejemplos: – 5 • – 10 = 50 (5 • 10 = 50: – • – = +)
12 • – 4 = – 48 (12 • 4 = 48: + • – = –)

Siempre se deben multiplicar o dividir los números y luego aplicar las reglas de signos para dichas operaciones (las reglas de signos para la suma son para la suma y no deben ser confundidos con los de estas otras operaciones).

4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición: Una expresión algebraica, en una o más variables (letras), es una combinación cualquiera de estas variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Observaciones:

1. La notación 3ab significa 3 · a · b. En general, se coloca el signo de la multiplicación cuando se expresa el producto entre números, como por ejemplo 4 · 3.
2. Las expresiones algebraicas aparecen en diversos campos: geometría, física, economía, etc. Por ejemplo, el ´área de una circunferencia en términos de su radio r: A = 2_r2, la fórmula de interés simple en términos de la cantidad inicial C, la tasa de interés i y del tiempo t: I = C i t.

Término: Es cada sumando, o cada parte, en una expresión algebraica, separada por + o −.
Nota: Expresiones algebraicas que constan de un solo término se llaman **monomios**, con dos términos se llaman **binomios**, etc.

Coeficiente: Cada término consta de: un factor numérico y un factor literal. El factor numérico de un término se denomina coeficiente numérico o simplemente coeficiente.

Términos semejantes: Son los términos que tienen el mismo factor literal (se diferencian sólo en su coeficiente numérico).
Por ejemplo, en la expresión 5xy2 − 3xy + 2xy2 − 7: el coeficiente numérico del término 5xy2 es 5; los términos 5xy2 y 2xy2 son términos semejantes.

Evaluación de una expresión algebraica

Cuando se sustituye por números cada una de las variables de una expresión (para los cuales está definida) y se realizan los cálculos, el número que se obtiene es el valor de la expresión para dichos reemplazos.
Dos expresiones que tienen el mismo valor para todas las sustituciones, para las cuales están definidas, se dice que son expresiones equivalentes.
Ejemplo:
• Las expresiones: 4(a + 5b) y 4a + 20b, son equivalentes para todo a, b 2 R. Esto se expresa: 4(a+5b)=4a+20b.

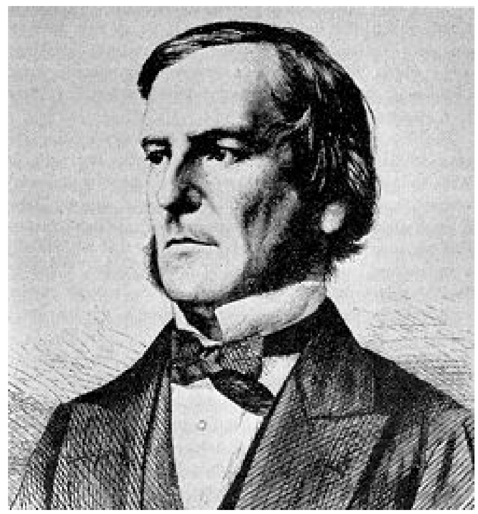
Operaciones con expresiones y propiedades

La suma y el producto de expresiones algebraicas son expresiones algebraicas.
Las operaciones de adición y multiplicación satisfacen las mismas propiedades que la operatoria con números.
Diferencia: $a - b = a + (-b)$.
Multiplicación: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.
Simplificación: Utilizando propiedades de las operaciones, y agrupando los términos semejantes, una expresión algebraica se puede transformar en una expresión más simple, o simplificar.

BOOLE Y EL ALGEBRA DE LA LOGICA

GEORGE BOOLE

(2 de noviembre de 1815 - 8 de diciembre de 1864). Fue un matemático y filósofo británico.
Como inventor del álgebra de Boole, la base de la aritmética computacional moderna, Boole es considerado como uno de los fundadores del campo de las Ciencias de la Computación.
En 1854 publicó "An Investigation of the Laws of Thought" en el que desarrollaba un sistema de reglas que le permitían expresar, manipular y simplificar problemas lógicos y filosóficos cuyos argumentos admiten dos estados (verdadero o falso) por procedimientos matemáticos. Se podría decir que es el padre de las operaciones lógicas y gracias a su álgebra hoy en día es posible manipular operaciones lógicas.



¿TUVO BOOLE UNA CONCEPCIÓN PSICOLOGISTA DE LA LÓGICA?

Sobre **Boole** han recaído diversos calificativos que en algunos casos y, por lo menos, bajo una primera impresión son difícilmente compatibles. Por un lado, **Boole es uno de los pioneros de la lógica matemática actual.** Además, **Boole tiene una concepción psicologista de la lógica**. En primera instancia no parecen compatibles estas dos calificaciones, pero puede ocurrir que no sean justas con la aportación y obra booleana y, si lo son, puede que la incompatibilidad sea aparente. En este apartado trataremos de dar una respuesta sobre esta prima facie incompatibilidad.
Asumiremos que efectivamente Boole es uno de los pioneros de la **lógica matemática** tal y como se entiende ésa en la actualidad. En apartados sucesivos de este trabajo trataremos de esclarecer hasta dónde es justo este carácter pionero atribuido a la lógica de Boole. Nos centraremos, pues, en el supuesto psicologismo.
Antes de tomar alguna decisión sobre si es adecuado calificar a Boole como psicologista debemos delimitar el significado asociado con dicha expresión. La tesis básica del **psicologismo** es que las leyes de la lógica son generalizaciones empíricas establecidas a partir de experiencias subjetivas. De esta forma, las leyes de la lógica tienen un carácter descriptivo de aquellas experiencias. Consecuentemente también, la lógica constituye un conocimiento de marcado carácter a posteriori.
Antes de pasar a analizar las afirmaciones de Boole acerca de la naturaleza de la lógica, a modo de ilustración, podemos resumir la crítica que **Frege** hace a la perspectiva psicologista de la lógica para ver que esta última, tal y como la entiende Frege, se ajusta a la caracterización que hemos propuesto:

“Pero nada significaría comprender peor la matemática que someterla al dominio de la psicología. Ni la lógica ni la matemática tienen como tarea investigar las mentes y el contenido de la conciencia del que el hombre individual es portador”.

Frege no acepta la lógica como fundamentada en contenidos de **conciencia**, que él denomina ‘representaciones’, ya que la lógica se convertiría en una disciplina que se ocupa de lo subjetivo. Esta es la característica, según Frege, propia de las representaciones. Nada más lejos de la **concepción fregeana de la lógica**. Frege señala que la lógica tiene la tarea de encontrar las leyes del ser verdad y afirma que si pensamos que la lógica trata del proceso mental y de las leyes psicológicas de acuerdo con las cuales aquél tiene lugar entonces la verdad no detenta el lugar que le corresponde. Frege rechaza el psicologismo ya que las leyes del ser verdad no se encuentran en supuestas leyes psicológicas. Valga esta breve, quizás demasiado breve, caracterización de una postura **antipsicologista** para pasar a continuación a analizar la concepción general con respecto a la lógica del propio Boole.
Cuando uno lee tanto Boole (1847) como Boole (1854) no ha lugar a dudas que las consideraciones generales acerca de la lógica llevan un ropaje psicologista y/o mentalista:

“Lo que hace posible a la Lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales, nuestra capacidad de concebir una clase y designar a sus miembros individuales por un nombre común”.

De esta forma la lógica está relacionada con la teoría del lenguaje: los nombres comunes constituyen una vía lingüística de expresión de las nociones mentales alojadas en nuestra mente.

“Suponiendo la noción de una clase, somos capaces de separar por un acto mental, de cualquier colección concebible de objetos, los que pertenecen a la clase dada, y contemplarlos aparte del resto. Podemos concebir que un acto de elección tal, u otro similar, se repitan. El grupo de individuos que resta bajo consideración puede limitarse aún más, seleccionando mentalmente entre ellos los que pertenecen a alguna otra clase reconocida, a la par que a la anteriormente contemplada. Y este proceso puede ser repetido con otros elementos de distinción, hasta que lleguemos a un individuo que posea todos los caracteres distintivos tomados en cuenta, y sea miembro al mismo tiempo, de toda clase que hayamos enunciado”.

Esta es la descripción que Boole nos proporciona de los actos mentales de los que la lógica debe ocuparse. Supuesta una clase de individuos podemos seleccionar una subclase mediante -un acto mental. Esta operación es repetible. Si tenemos la clase de los seres humanos, podemos, mediante un **acto mental**, hacer una selección de los europeos. Posteriormente podemos seleccionar los alemanes, así, dice Boole, hasta que lleguemos a un individuo. Estos actos mentales tienen su reflejo lingüístico cuando acumulamos epítetos descriptivos: se trata de un ser humano europeo y alemán.
Básicamente la lógica se ocupa de estos **actos mentales**, expresando los mismos en un **lenguaje lógico-algebráico**, y de las leyes a las que están sujetos.

“El propósito del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente mediante las cuales se lleva a cabo el razonamiento: expresarlas en el lenguaje simbólico de un cálculo, y establecer sobre esa base la ciencia de la Lógica y construir su método”.

En este párrafo aparecen ya diferentes características ligadas a la lógica y que, como hemos señalado al principio, pudieran resultar contrapuestas entre sí. Por un lado, se reafirman las tesis señaladas en los párrafos citados más arriba y, por otra parte, se limita el campo de estudio a la actividad del razonamiento, insistiendo en el carácter simbólico del lenguaje de representación de los procesos mentales, además de incorporar una idea relativamente novedosa: **la lógica adquiere forma de cálculo**. La contraposición a la que hacíamos referencia es la siguiente: la lógica tiene como objeto determinados procesos y actos mentales pero, en su despliegue, recurre a un lenguaje simbólico propio de un cálculo.

¿No es factible pensar que ese supuesto objeto de la lógica sea, cuanto menos, adulterado cuando esas operaciones mentales y leyes fundamentales de las mismas son representadas en el lenguaje simbólico de un cálculo?

Además, ¿se ajustan los preceptos metodológico-epistemológicos propios del despliegue del **cálculo booleano** a los aspectos metodológico-epistemológicos que uno asocia con toda disciplina que pueda llamarse psicológica? Una respuesta a estas preguntas resulta dificultosa antes de conocer en detalle la **lógica booleana**. En cualquier caso, podemos adelantar que, desde nuestro punto de vista, no cabe identificar en la lógica de Boole aspectos que nos llevaran a reconocer su supuesto psicologismo. En este sentido estamos de acuerdo con la valoración de **Kneale** cuando afirma:

“La primera ruptura con la confusa tradición fue dada por **Bolzano** (filósofo-matemático él mismo), pero fue la obra de Boole la que mostró con claridad por vía de ejemplo que la lógica podría ser provechosamente estudiada sin referencia alguna a los procesos de nuestras mentes. Boole creía, sin duda alguna, estarse ocupando de las leyes del pensamiento en algún sentido psicológico de esa ambigua expresión, pero de lo que se ocupaba en realidad era de algunas de las **leyes más generales de lo pensable**”.

Es indudable, a partir de los textos, que se reconoce un psicologismo de palabra en los textos booleanos, pero de hecho es difícil identificar ese psicologismo. Una corroboración de lo señalado puede ser que la tradición booleana, en general, heredó el sistema de Boole y no tanto sus **ropajes psicologistas**. De cualquier manera, nada de lo apuntado tendrá sentido mientras no hagamos una descripción de la lógica que nos ocupa. Antes de realizarlo, no queremos pasar por alto una de las afirmaciones booleanas que más comentarios ha generado al tratar el tema del psicologismo:

“Por otra parte, el conocimiento de las leyes de la mente no requiere como fundamento una colección extensa de observaciones. La verdad general se ve en el caso particular, y no se confirma por la repetición de casos particulares... En conexión con esta verdad se puede ver la no menos importante de que nuestro conocimiento de las leyes sobre las que reposa la ciencia de las **potencias intelectuales**, cualquiera que sea su alcance o su deficiencia, no es conocimiento probable. Pues no sólo vemos en el ejemplo particular la verdad general, sino que la vemos como una verdad cierta -una verdad referente a la cual nuestra confianza no irá aumentando a medida que se incremente la experiencia de sus verificaciones prácticas”.

Básicamente son dos las ideas que Boole nos presenta en relación a la naturaleza de las **leyes de la mente** (laws of the mind), que constituyen el objeto de la lógica. En primer lugar, no accedemos a las leyes de la mente inductivamente ya que la verdad general que siempre es una ley de la mente se ve en un caso particular. Además, **una ley de la mente es una verdad cierta** (certain truth). Estas dos características contrastan, según el propio Boole, con las características asociadas con las leyes de la naturaleza. Estas últimas son probables, por oposición a ciertas, y son o obtenidas inductivamente o establecidas a modo de hipótesis. No hay, ninguna forma de compatibilizar las leyes de la mente con las **leyes de la naturaleza**, ya que la dicotomía probable/cierto las separa ineludiblemente. Consideramos que si el mecanismo de aprehensión de las leyes lógicas - aprehensión clara de lo universal en un caso particular y aleja la lógica booleana de las concepciones psicologistas de la lógica, el carácter cierto de dichas leyes lógicas abre una brecha infranqueable entre una concepción psicologista de la lógica y la concepción booleana de la lógica. Realmente Boole está comparando las leyes de la naturaleza con las leyes de la mente. Lo que ocurre es que una concepción psicologista atribuye a las leyes de la lógica lo que Boole atribuye a las leyes de la naturaleza. Por ejemplo, **Mill** considera que la lógica es una colección de reglas del pensamiento ya que se basa sobre el mayor número de experiencias posibles.

Estas reglas tienen el valor que tienen precisamente por estar sustentadas en la experiencia. En la **perspectiva milliana** difícilmente cabe atribuir a las leyes de la lógica el carácter de verdades ciertas.

Parece claro, pues, que Boole presenta una caracterización de las leyes de la mente que no parece ajustarse a los preceptos metodológicos que una concepción psicologista de aquéllas implica. Otra vía que confirma esta interpretación sobre el pretendido psicologismo booleano vendrá dada cuando analicemos el trabajo de Boole 'tal cual' independientemente de sus expresiones más o menos acertadas sobre lo que 'de hecho' él hace.

En cualquier caso, no estaría de más dilucidar en qué consiste esa aprehensión de lo universal a partir de lo particular que Boole plantea con respecto a las leyes de la mente y que precisamente otorga a aquéllas las mencionadas **'características nopsicologistas'**.

Una vez más la mejor vía es ver cómo Boole distingue las leyes de la naturaleza de las leyes de la mente, de tal forma que, a su vez, se hace evidente su perspectiva no psicologista de la lógica. En determinado momento califica las proposiciones que expresan las leyes del pensamiento como verdades necesarias, equiparables a las **proposiciones generales de la aritmética.** Posteriormente señala el carácter no descriptivo de las leyes del pensamiento o leyes matemáticas del razonamiento, separando una vez más su concepción de la lógica de las concepciones psicologistas. Su argumento discurre de la siguiente forma: las leyes de la naturaleza describen la naturaleza, valga la expresión, exterior. Supongamos que las leyes del razonamiento describen los razonamientos que la gente realiza. En cierto sentido podemos pensar que hay una analogía, metodológica si se quiere. Esta analogía es aparente. Es obvio que la gente razona sin ajustarse a las leyes del razonamiento. También cabe decir que en ocasiones la naturaleza no se ajusta a las leyes de la naturaleza. Con lo cual el símil continúa y cabe pensar en una convergencia metodológica entre el establecimiento de las leyes de la naturaleza y del razonamiento, habida cuenta que este paralelismo alimentaría una concepción psicologista de la lógica.

El problema es que en el caso de las leyes de la naturaleza el mencionado desajuste está en las leyes y no en la naturaleza misma, es decir, cuando hay desajuste o se pasa a nuevas concepciones o leyes de tal, forma que el ajuste sea reestablecido o simplemente una observación más detenida concluye el carácter aparente del desajuste. Si, como hemos supuesto, las leyes de pensamiento son descripciones de una realidad, ante la existencia evidente de desajustes entre la realidad y su descripción debemos, metodológicamente hablando, obrar de la misma forma que lo hacemos con las leyes de la naturaleza. Esta no es la solución de Boole. Contrariamente, en el caso de las leyes del pensamiento el desajuste no se resuelve de la misma forma La razón es **que para Boole las leyes del pensamiento no tienen un carácter descriptivo.** Las leyes del razonamiento son leyes del **razonamiento correcto** (right reasoning). Se pueden violar las **leyes de la inferencia correcta**, pero no por ello dejan de existir. La ley del razonamiento convive con su trasgresión. Boole parece distinguir entre las leyes, ahora, intelectuales dos tipos. Por un lado, están las leyes establecidas en la lógica. Por otro, nos encontramos con aquellas leyes que causan la ruptura. Las primeras marcan el camino del razonamiento correcto, las segundas abren las puertas a la trasgresión.

Quizás las segundas sí sean susceptibles de ser establecidas como tales siguiendo la metodología propia para el establecimiento de las leyes naturales. Se trata de una hipótesis, en cualquier caso, independiente de lo que querernos mostrar; a saber, el carácter no psicologista de la concepción booleana de la lógica. El **carácter prescriptivo-normativo** de la lógica es una prueba más. Las leyes del pensamiento junto con las leyes de la matemática constituyen para Boole verdades necesarias. En el esquema de Boole la lógica aparece ligada a la matemática mientras que una concepción psicologista de la lógica relacionaría ésta con las leyes de la naturaleza.

TALLER 1

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Resuelva cada problema, leyéndolo e interpretándolo y asignando un símbolo para la variable. Plantee la ecuación correspondiente y resuélvala paso a paso. Compruebe que su respuesta es correcta remplazándola en la ecuación inicial.

1. Carlos tiene siete años más que su hermana Lorena y entre ambos suman 45 años. Halle la edad de cada uno.
2. El perímetro (P) de un rectángulo está dado por le ecuación $P= 2l + 2a$, donde l es el largo y a el ancho. Halle el largo de un rectángulo si el perímetro es 46cm y el ancho 9cm.
3. Andrea tiene 40 estampillas menos que Jhon y entre ambos suman 104 estampillas. Halle la cantidad de estampillas que tiene cada uno.
4. Entre Estela y Juliana deben repartirse $117.000 de tal forma que a Estela le corresponda el doble que a Juliana. ¿Qué cantidad debe recibir cada una?
5. Halle matemáticamente dos números enteros consecutivos tales que su suma dé -29.
6. Tres números enteros consecutivos suman 54. Halle los tres números.
7. El largo de un rectángulo excede al ancho en 3m y su perímetro es 38m. Halle las dimensiones del rectángulo.
8. Los dos tercios de un número equivalen a -26. Halle ese número.
9. Las tres cuartas partes de un número menos cinco sextos del mismo equivalen a -3. Halle ese número.
10. Andrés gana cinco tercios del lo que gana Sebastián y entre ambos suman un salario semanal de $1`600.000. ¿Cuánto gana cada uno a la semana?
11. El lunes compré x estampillas, el martes la mitad de las del lunes, el viernes cinco cuartos de las del lunes y hoy el doble de las del lunes. Si en total tengo 57 estampillas, ¿cuán compré cada día?
12. Cuántos años vivió DIOFANTO si su niñez duró un sexto de su edad, su juventud fue de un doceavo, un séptimo más vivió antes de casarse, 5 años más tarde nació su hijo quien vivió la mitad de la edad de Diofanto y cuatro años estuvo de duelo antes de morir.

Nota: *Consultar la biografía de Diofanto.*