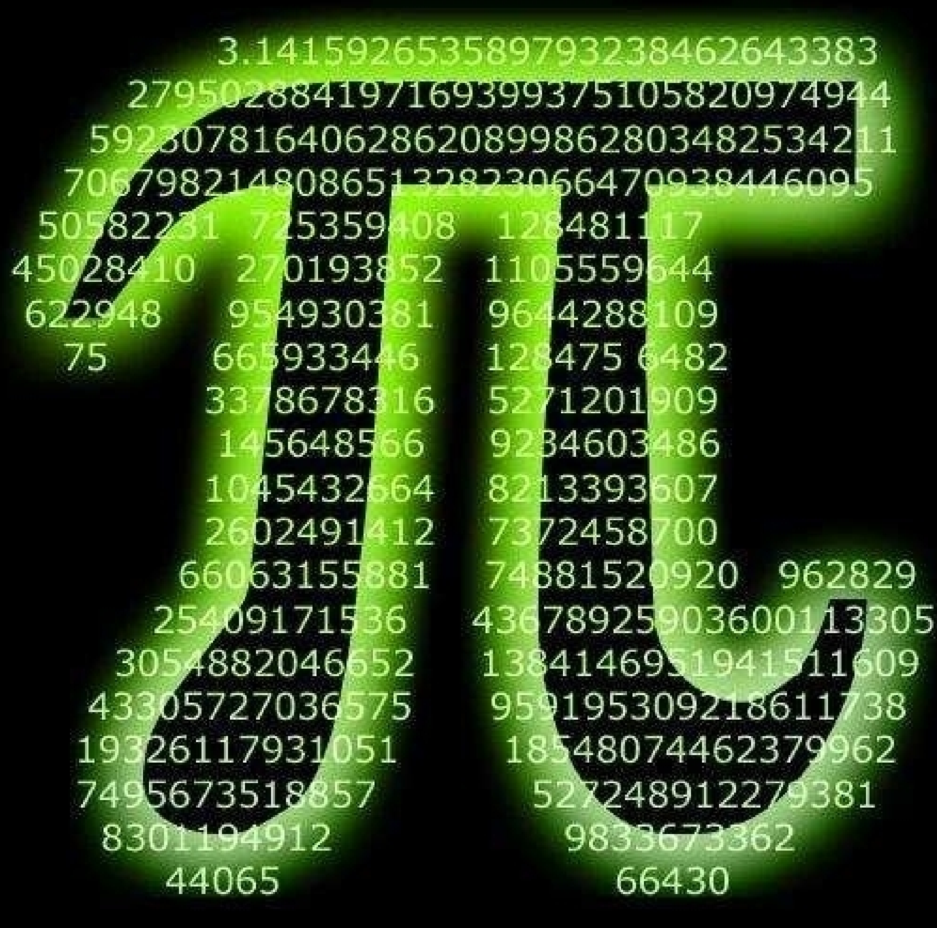
GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA



Edivar Fernández Hoyos
edivarf@gmail.com
www.akre.jimdo.com

INTRODUCCIÓN

La asignatura Geometría Analítica Plana, esta ubicada en el sexto ciclo del Pensum de estudios de la carrera de Físico Matemáticas que ofrece la Escuela de Ciencias de la Educación, en la Modalidad de Estudios Abierta y a Distancia.

La geometría plana proporciona una excelente preparación para el estudio del calculo y el algebra lineal cuyas materias están en los ciclos superiores.

Al termino del estudio de la presente asignatura se pretende que el alumno comprenda y aplique básicamente los dos problemas fundamentales como son: la grafica de una ecuación y ecuación de un lugar geométrico y además que pueda demostrar y aplicar vario teoremas, principio y formulas de resolución de problemas.

Para comprender los problemas de matemáticas es primordial y fundamental comprender los conocimientos básicos de la geometría analítica, cuya materia comprende una serie de aplicaciones de principios básicos de la matemática, los que si los vamos analizando en forma secuencial nos permitirán comprender y entender de una manera fácil y sencilla, el propósito de esta guía es de cumplir con ese objetivo.
En la guía consta de algunas unidades en los que se destacan:

1. Capitulo 1: Sistemas de coordenadas.

En este capitulo se revisan los sistemas coordenados lineal y rectangular. En el sistema coordenado rectangular, se demuestran teoremas y se resuelven problemas de figuras geométricas.

2. Capitulo 2: La línea recta

En este capitulo se da una definición de la línea, se demuestra las diferentes formas de la ecuación de la recta. Sus aplicaciones, la distancia de una recta a un punto y las ecuaciones de las bisectrices.

3. Capitulo 3: Ecuación de la circunferencia

En este capitulo se define la circunferencia, forma ordinaria. Forma general de le ecuación de la circunferencia. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas y tangentes a la circunferencia.

4. Capitulo 4: La parábola

Este capitulo se tiene la definición de la parábola, ecuación de la parábola con vértice en el origen y un eje coordenado, ecuación de la parábola de vértice (h, k) y paralelo a un eje coordenado, ecuación de una tangente a una parábola, función cuadrática y algunas aplicaciones de la parábola.

5. Capitulo 5: La elipse

En este capitulo se define la elipse, ecuación de la elipse de centro en el origen, ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a las coordenadas, propiedades de la elipse.

6. Capitulo 6: La hipérbole

Dentro de este capitulo se da una definición de la hipérbole, primera ecuación de la hipérbole, asintota de la hipérbole, segunda ecuación de la ordinaria de la hipérbole, propiedades de la hipérbole.

OBJETIVO GENERAL

- Al término de curso, el estudiante desarrollara habilidades matemáticas para plantear, analizar y resolver problemas de geometría analítica. Además estar capacitado para estudios posteriores de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA:

LEHMAN Charles, 1997, geometría analítica, editorial LIMUSA, S.A. de C.V. GRUPO NORIEGA EDITORES, México D. F.

El presente texto constituye un curso de Geometría analítica plana y del espacio (nosotros tomaremos la correspondiente a la geometría analítica plana).

El método didáctico empleado en el texto consta de las siguientes partes: Orientación, motivo discusión y ejemplos a manera de una lección oral.

Para orientar al alumno, usa primero ideas familiares y luego conforme avance en los contenidos va introduciendo nuevos conceptos

En el desarrollo de los temas se ha puesto especial cuidado con el fin de tratar de centrar los conocimientos en los conceptos, y no se hago una simple idea de de los conocimientos analíticos.

Esta obra da un cuadro sinóptico o un resumen de formulas y resultados, esto de gran ayuda para el uso de tales resúmenes, siendo un texto mas completo en el desarrollo de la geometría analítica del espacio.

Al final del libro se dan las soluciones a la mayoría de los ejercicios propuestos, además hay varios ejercicios resueltos, como ayuda ara obtener conocimientos previos del alumno.

TEXTO COMPLEMENTARIO

JOSEPH H. KINDLE, SERIE SHAUM (1995) Geometría analítica, McGraw-Hill de México, S.A. de C. V.
Este texto proporciona una excelente preparación para el estudio de geometría analítica plana, el mismo que constituirá una gran ayuda para el alumno. Cada tema inicia con un enfoque teórico de cada uno de los temas, al que se acompaña una sección de ejercicios resueltos.
Al final de cada capitulo se presenta una serie de problemas resueltos y propuestos.

INTERNET

Htt://www.Sectormatematica.cl/libros.htm

ORIENTACIONES GENERALES

Esta pagina de Internet tiene libros didácticos, permite extraer de cada capitulo problemas resueltos, esto permite al estudiante obtener mayor destreza para resolver otros problemas que se pueden presentar en el desarrollo del curso de Geometría Analítica.

La Geometría Analítica es una asignatura en donde se estudiará, figuras geométricas planas en el sistema coordenado rectangular, con ayuda de ecuaciones y formulas de varios tipos.
Además en este modulo se estudiara un conjunto de curvas que estén representadas por ecuaciones de segundo grado. A estos lugares geométricos que tienen sus condiciones geométricas se la conoce con el nombre de cónicas.

Para el estudio de los temas propuestos realizar una lectura comprensiva de cada uno de ellos subrayando los aspectos que considere mas importantes, luego analícelos, si algunos de los temas le son difíciles señálelos con el fin de que posteriormente sea objeto de consulta al profesor, o consulte la pagina de Internet recomendado en bibliografía.
Esta guía es curso de Geometría Analítica Plana, el alumno debe tener conocimientos de Geometría elemental, trigonometría y algebra.

Una vez comprendido la parte teórica inicie revisando los problemas resueltos analícelos y repita los mismo, para lo cual requiere tener conocimientos de matemáticas básica, calculadoras para realizar los cálculos respectivos, material didáctico, revisados los temas empiece por resolver los temas propuestos, los que poseen características muy similares a los problemas resueltos planteados los que pueden servir como guía. El alumno debe por lo menos estudiar dos horas diarias para que tenga una orientación de los conceptos, a la manera de una lección oral, para no obtener un mal entendimiento en los principios, conduciendo a dificultades continuas en las partes mas avanzadas.

Una vez terminado su unidad realice los ejercicios de auto evaluación que esta en la guía en la que se revisara los conceptos básicos y su aplicación, así como la resolución de problemas, evalúe su avance si se tiene dificultad en alguna de los aspectos tratados, revise nuevamente o si le resulta muy difícil consulte con el profesor inclusive si considera que el tema puede aplicarse a otros campos en los que usted tenga conocimiento trate de resolver aplicando estos conocimientos básicos.

La presente guía será desarrollada en el transcurso de dos semestres por lo que divida los temas de tal manera que cubra este tiempo, en el caso de que algunos de los temas le resulte fácil siga adelante con el estudio pueda que en lo posterior exista algún tema que le sea difícil al cual tendrá que dedicarlo mas tiempo y si por el contrario empieza a retrasarse tendrá que dedicarle mas tiempo con el fin que los temas finales queden sin ser revisados.

DESARROLLO DEL APRENDIZAJE

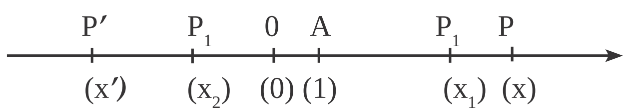
Capítulo 1.

SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1 SISTEMA DE COORDENADAS LINEALES

Sobre una línea recta se encuentran una gran cantidad de puntos los que se encuentran sobre ella.

TEOREMA 1.- En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo, restando la coordenada del origen y la coordenada del extremo.



La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si representamos la distancia por d, podemos escribir:

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = \left|x_2 \quad x_1\right|,$$

$$d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = \left|x_1 \quad x_2\right|,$$

Ejemplo 1

Encontrar la distancia entre los puntos p1 (5) y p2 (-3)

Solución

Distancia p1p2 = -3-5 = -8
p2p1 = 5-(-3)= 8

En cualquiera de los dos casos la distancia esta dada por
d = -8 = 8 = 8

Ejemplo 2

Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (-5) y (6); (3) y (-7); (-8) y (-12).

Solución

d1 = x2-x1
d1 = 6 – (-5)   la distancia se calcula mediante la diferencia de coordenadas
d1 = 6+5   hay que tener en cuenta la ley de signos
d1 = 11

d2 = (-7) – 3
d2 = -10
d2 = 10   El resultado de la distancia es su valor absoluto

d3 = (-12) – (-8)
d3 = - 4

Ejemplo 3

La distancia comprendida entre dos puntos es 7. Si uno de los puntos es $P_1(3)$, hallar el otro punto $P_2(x_2)$. (Dos casos).

Solución.

Caso a)

$P_1P_2 = x_2 - x_1$

$7 = x_2 - 3$

$x_2 = 7 + 3$

$x_2 = 10$

0   P1 P_2

(3)   (10)

Caso b)

$P_2P_1 = x_1 - x_2$

$7 = 3 - x_2$

$x_2 = 3 - 7$

x2 = -4

P_2 0 P_1

(-4)   (3)

Ejemplo 4

Demostrar que las coordenadas del punto medio de un segmento rectilíneo es la semisuma de las coordenadas de sus extremos

Solución.

En la formula $X = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, se hace r = 1. Entonces:

$$X = \frac{x1 + x_2}{2}$$

Ejemplo 5

Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

Solución.

$X = \frac{P1 + P2}{2}; \quad 3 = \frac{-8 + P_2}{2}; \quad 6 = -8 + P_2$

$P_2 = 14$

Ejemplo 6

Tres vértice de un rectángulo son los puntos (2, -1), (7, -1) y (7, -3). Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

Solución.

d AB = 7 – 2 = 5
d BC = 3 + 1 = 4
Como AB = DC Y BC = AD
Se tiene que: $AD = y_4 - y_1$
$4 = y_4 + 1$
$Y4 = 3$

DC = X3 – X4
5 = 7 – X4
X4 = 2

Área: AB x CB = 4x5 = 20

Ejemplo 7

Los vértices de un triangulo rectángulo son los puntos P1 (-2,-3), P2 (5, -3) y P3 (5,5). Calcular: a) La longitud de los tres lados, B) El área del triangulo y c) Su perímetro.

Solución.

a) La longitud de los tres lados

$dP_1P_2 = x_2 - X_1 = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

$dP_2P_3 = y_3 - y_2 = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$

La longitud P_1P_3, se calcula aplicando el teorema de Pitágoras, puesto que P_1p_3 es la hipotenusa.

$P_1P_3 = \sqrt{7^2 + 8^2}$

$P_1P_3 = \sqrt{113}$

$P_1P_3 = 10.63$

b) Área

A = ½ (base x altura)

A = ½ (7 x 8)

A = ½ (56)

$A = 28\ u_2$

c) Perímetro

Por definición es la suma de los lados.

P = 7 + 8 + 10.63

P = 25.63

Ejemplo 8

Calcular los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos P_1 (-5) y P_2 (12).

Solución.

Sean los puntos P3 (x3) y P4 (x4) los puntos de trisección, Hallamos la razón (r).

Cuando se trate de calcular los puntos de trisección , el valor de la razón (r) toma dos valores r = ½ y r = 2.

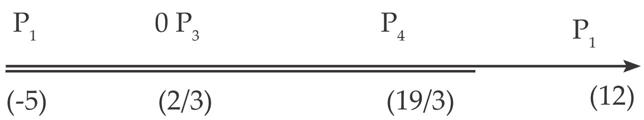
Entonces:

$$X = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r} = \frac{-5 + 2\,(12)}{1 + 2} = \frac{-5 + 24}{3} = \frac{19}{3}$$

$$X = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r} = \frac{-5 + \frac{1}{2}(12)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-5 + 6}{3/2} = \frac{2}{3}$$

Los puntos de trisección son P_3 = (19/3) y P_4 = (2/3)

Gráfico.



El punto medio es:

$$X = \frac{x1 + x2}{2} = \frac{-5 + 12}{2} = 7/2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2). Hallar el otro punto. (Dos casos)

   Solución: $x_1 = -11$ y $x_2 = 7$

2. Calcular los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos P1 (4) y P2 (15).

   Solución: Puntos de trisección P3 = (34/3) y P4 = (23/3)
   Punto medio P (19/2)

3. Los vértices de un triangulo son los puntos (1, -2), (4,-2), (4,2). Determinar la longitud de los catetos y después calcular el área del triangulo y la longitud de la hipotenusa.

   Solución.

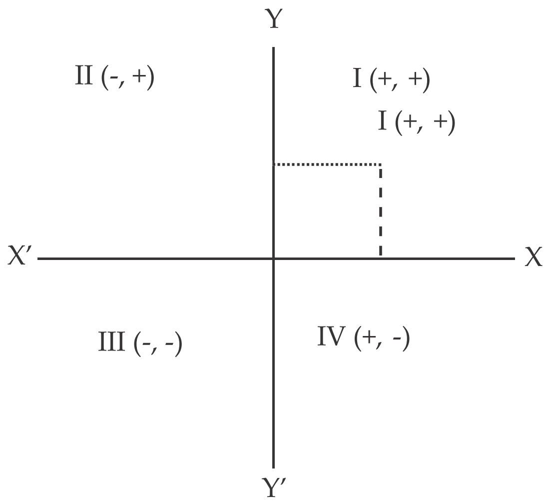
   Longitud de los catetos: AB = 3 y BC = 4
   Área = 6 u^2
   La hipotenusa = 5

4. Hallar la distancia entre los puntos (6,0) y (0,-8).

   Solución: Graficar; $dP_2P_1 = 10$

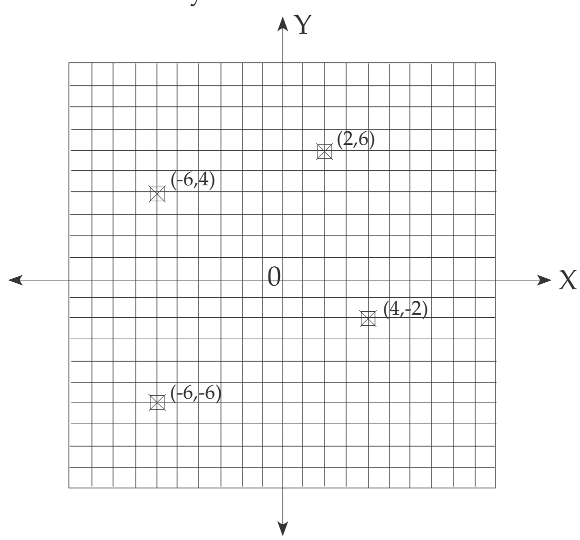
1.2 SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO

El sistema coordenado lineal es limitado para realizar análisis de las propiedades geométricas, por lo que se hace necesario el utilizar el sistema coordenado bidimensional o plano cuya intersección se la denomina origen, el cual posee dos líneas perpendiculares cuyos ejes son coordenados y sus cuatro regiones se las denomina cuadrantes, los signos en cada cuadrante depende donde se ubique el punto.



Para comprender se sugiere revisar el ejercicio planteado en texto guía y resolver los ejercicios propuestos en el mismo, en el cual también se trata sobre el tema anterior.

El trazado de los puntos se facilita notablemente usando papel coordenado rectangular, dividido en cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes coordenados. La siguiente figura es un modelo de papel de esta clase, la misma que se recomienda su uso a los estudiantes para el trazado de mayor exactitud.



Ejemplo 1

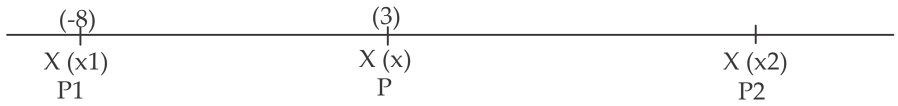
Los extremos de un segmento dirigido es el punto (-8) y sus punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

Solución:

$x = \frac{P_1 + P_2}{2}$; $3 = \frac{8 + P_2}{2}$; $6 = 8 + P_2$

$P_2 = 14$

Grafico:



1.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DADOS

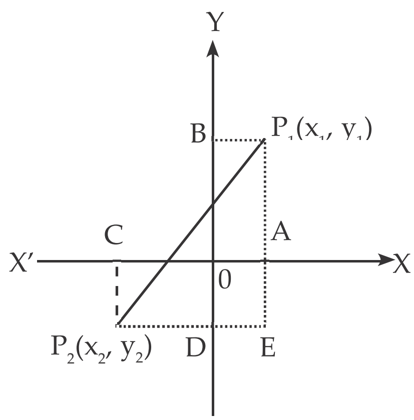
Considerando dos puntos cualesquiera entre los cuales se desea encontrar la distancia si proyectamos en cada uno de los ejes u los unimos observamos que se va forma un triangulo rectángulo el que de acuerdo al teorema de Pitágoras se tiene que el cuadrado de la hipotenusa es igual ala suma del cuadrado de sus catetos, para este caso tenemos:

$$\mathbf{d^2 = (x1\text{-}x2)^2 + (y1\text{-}y2)^2}$$

Por lo que la distancia entre dos puntos cualesquiera se encontraría con el siguiente teorema:

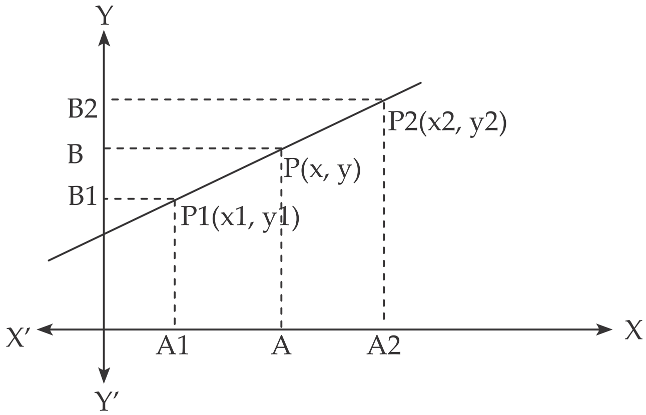
TEOREMA 2.- La distancia de entre dos puntos P1(X_1, Y_1) Y p2(X_2,Y_2) está dada por la formula.

$$d = \sqrt{(x1 \quad x2)^2 + (y1 \quad y2)^2}$$



TEOREMA 3.- Si P1(x1, y1) y p2(x2, y2) son los extremos de un segmento $\overline{P1P2}$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento es la razón dada: $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \; y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \; r \quad - 1$$



En el caso particular en que P es el punto medio del segmento dirigido P1P2, es decir r=1, de manera que los resultados anteriores se reducen a.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

Para mayor compresión ver demostración en el texto Guía. "Geometría Analítica de Lehmann Pág. 12"

COROLARIO. Las coordinas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son (x1, y1) y (x2 , y2) son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

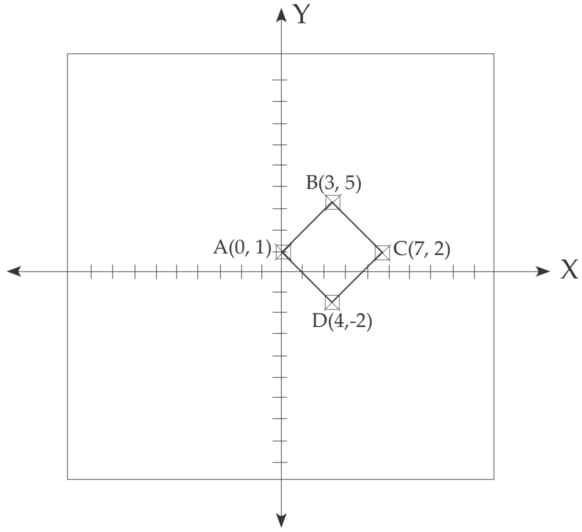
Ejercicios

1. Demostrar que los puntos A(0,1), B(3,5), C(7,2), D(4,-2) son los vértices de un cuadrado

   Solución:

   Para demostrar que estos puntos son los vértices de un cuadrado, se ti tiene que calcular la distancia de sus diagonales las que tienen que ser iguales.

$$d\,\overline{AB} = \sqrt{(3\quad 0)^2 + (5\quad 1)^2} = 5$$



$$d\overline{BC} = \sqrt{\left(7 \quad 3\right)^2 + \left(2 \quad 5\right)^2} = 5$$

$$d\overline{CD} = \sqrt{\left(4 \quad 7\right)^2 + \left(\quad 2 \quad 2\right)^2} = 5$$

$$d\overline{DA} = \sqrt{\left(0 \quad 4\right)^2 + \left(1 \quad (\quad 2)\right)^2} = 5$$

Como se ha podido observar las diagonales del cuadrado posee la misma longitud por tanto queda demostrado que dichos puntos son los vértices de un cuadrado.

2. Calcular la distancia comprendida entre los puntos:

a) p1(4) y p2(9); b) p1(6) y p2(-2) c) (pp1(-5) y p2 (-11).

Solución.

a) p1p2 = x2 - x1
p1p2 =9 - 4
p1p2 = 5

La distancia se la puede obtener restando los puntos en sentido contrario

p2p1 = x1 -x2
p2p1 = 4 - 9
p2p1 = -5

La distancia final es el valor absoluto lo que nos da
d = | 5 | = |-5 | = 5

b) p1p2 = x2 - x1
p12p2 = -2 - 6
p1p2 = -8

La distancia se la puede obtener restando los puntos en sentidos contrario

p2p1 = x1 -x2
p2p1 = 6 - (-2)
p2p1 = 8

La distancia final es el valor absoluto lo que nos da

d = l-8 l = l 8 l= 8

c) p1p2 = x2 - x1
p1p2 =-11 - (-5)
p1p2 = -6

La distancia se la puede obtener restando los puntos en sentidos contrario

p2p1 = x1 -x2
p2p1 = -5 +11
p2p1 = 6

La distancia final es el valor absoluto lo que nos da

d = l -6 l = l 6 l= 6

3. Hallar las coordenadas del punto P (x, y) que equidista de los puntos fijos A(10,4), B(9,7) y C(6,10).

Solución:

Si el Punto P(x, y) equidista los puntos fijos A, B y C, entonces las distancias: d(A, P), d(B, P) y d(C, P) son iguales.

Es decir:
d(A, P) = d(B, P) = d(C, P)

Por tanto
d(A, P) = d(B, P)

$$\sqrt{\left(x \quad 10\right)^2 + \left(y \quad 4\right)^2} = \sqrt{\left(x \quad 9\right)^2 + \left(y \quad 7\right)^2}$$

Resolviendo esta ecuación se tiene:

x -3y +7 = 0 **(1)**

d(A,P) = d(C,P)

$$\sqrt{(x \quad 10)^2 + (y \quad 4)^2} = \sqrt{(x \quad 6)^2 + (y \quad 10)^2}$$

Resolviendo esta ecuación se tiene:

$2x - 3y + 5 = 0$ **(2)**

Por definición P es el punto de intersección de las rectas (1) y (2), lo que significa que hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones antes indicadas.

Es decir

$x - 3y + 7 = 0$
$2x - 3y + 5 = 0$

Resolviendo este sistema se tiene:
$x = 2$
$y = 3$

Por tanto las coordenadas del punto P (2,3).

4. Hallar los puntos de trisección y l punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos (-2 ,3) y (6,-3).

Solución: Puntos de Trisección

Primer Punto:

$$r = \frac{P1P3}{P3P2} = \frac{x3 \quad x1}{x2 \quad x3} = \frac{1}{2}$$

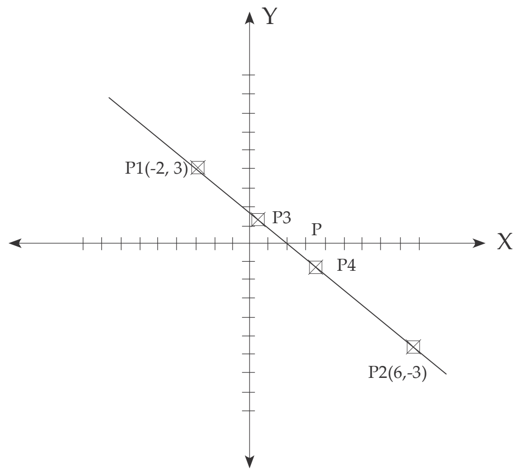
$$\frac{1}{2} = \frac{x3 + 2}{6 \quad x3}; 2x3 + 4 = 6 \quad x3 \qquad ® \; x3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y3 \quad 3}{3 \quad y3}; 2y3 \quad 6 = \quad 3 \quad y3 \qquad ® \; y3 = 1$$

Segundo Punto:

$$r = \frac{P1P4}{P4P2} = \frac{x4 \quad x1}{x2 \quad x4} = 2$$

$$2 = \frac{x4 + 2}{6 \quad x4}; 12 \quad 2x4 = x4 + 2 \qquad ® \; x4 = \frac{10}{3}$$



$$2 = \frac{y4 \quad 3}{3 \quad y4}; \quad 6 \quad 2y4 = y4 \quad 3 \quad ® \; y4 = \quad 1$$

Punto medio:

$$x = \frac{2+6}{2} = 2 \qquad\qquad y = \frac{3 \quad 3}{2} = 0$$

1.4 PENDIENTE DE UNA RECTA

Se denomina pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m por lo tanto, podemos escribir

$$m = \text{tag}\,\alpha$$

Si el ángulo α es agudo (α<90º) la pendiente es positiva y si es obtuso (α >90º) la pendiente es negativa.

TEOREMA 4. Si P1(X1, Y1) y P2(X2, Y2) son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta esta definida por.

$$m = \frac{y1 \quad y2}{x1 \quad x2}, x1 \;\bar{}\; x2$$

Ejercicios

1. Por medio de las pendientes demuestre que los tres puntos (6,-2), (2,1) y (-2,4) son colíndales

Solución

Para demostrar que los tres puntos son colineales los puntos 1 y 2 deben poseer la misma pendiente que los puntos 2 y 3, al igual que los puntos 1 y 3.

$$m12 = \frac{y1 \quad y2}{x2 \quad x1} \qquad m12 = \frac{1 \quad (\ \ 2)}{2 \quad 6} = \ \ \frac{3}{4}$$

$$m23 = \frac{y3 \quad y2}{x3 \quad x2} \qquad m23 = \frac{4 \quad 1}{2 \quad 2} = \ \ \frac{3}{4}$$

$$m13 = \frac{y3 \quad y1}{x3 \quad x1} \qquad m13 = \frac{4+2}{2 \quad 6} = \ \ \frac{3}{4}$$

Como se observa las dos pendientes poseen las mismas pendientes por lo tanto queda demostrado que los tres puntos se encuentran en una misma línea.

2. Los vértices de un triangulo son A(2,3), B(-2,l) y C(4,-4).
Demostrar que el cuadrado del lado de un triangulo mas el cuádruple del cuadrado de la mediana correspondiente es igual al doble de la suma de los cuadrados de los otros lados.

Solución:

Por definición, mediana en un triangulo es el segmento de recta que va desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto. En geometría analítica, las coordenadas del punto medio de un segmento vienen expresadas por:

$$x = \frac{1}{2}\left(X1 + X2\right); \qquad Y = \frac{1}{2}\left(Y1 + Y2\right)$$

En primer lugar, vamos a determinar el punto medio de un lado cualquiera del triangulo, por ejemplo del lado BC, a este punto lo llamaremos N. Como B(-2,1) y C(4,-4).

Entonces:

$$X = \frac{1}{2} * (\ \ 2 + 4) = \frac{1}{2} * (2)$$
$$X = 1$$

$$Y = \frac{1}{2} * (1 \quad 4) = \frac{1}{2} * (\ \ 3)$$
$$Y = \ \ \frac{3}{2}$$

Luego N (1, -3/2)

A continuación vamos a encontrar la longitudes de los lados del triangulo y la longitud de la mediana AN.

Longitudes de los lados del triangulo

$$d(AB)=\sqrt{(2+2)^2+(3\quad 1)^2}$$
$$d(AB)=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

$$d(BC)=\sqrt{(\quad 2\quad 4)^2+(1+4)^2}$$
$$d(BC)=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$$

$$d(AC)=\sqrt{(2\quad 4)^2+(3+4)^2}$$
$$d(AC)=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$$

Longitud de la mediana AN

$$d(AN)=\sqrt{(2\quad 1)^2+(3+(3/2))^2}$$
$$d(AN)=\sqrt{1+\left(\frac{81}{4}\right)}=\sqrt{\frac{85}{4}}$$

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$$d(BC)^2+4d(AN)^2=2\left(d(AB)^2+d(AC)^2\right)$$
$$\left(\sqrt{61}\right)^2+4*\left(\sqrt{\frac{85}{4}}\right)^2=2*\left(\left(\sqrt{20}\right)^2+\left(\sqrt{53}\right)^2\right)$$
$$61+85=2*(20+53)$$
$$146=146\quad \text{l.q.d.}$$

1.5 ÁNGULO DE DOS RECTAS

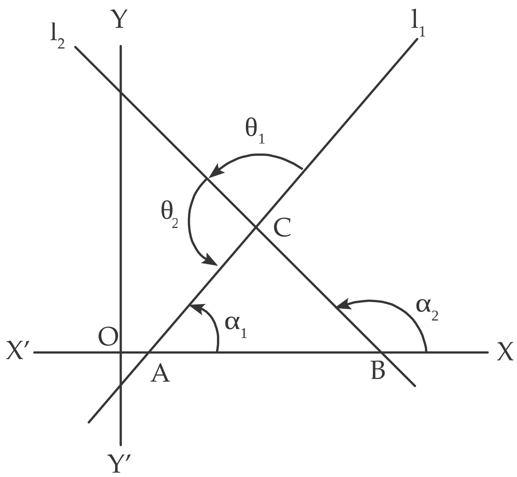
Consideramos el caso en que dos rectas se interesan cada una de las cuales posee una pendiente y un ángulo de inclinación cada una de las cuales posee una pendiente m1 y m2.

El ángulo formado por las dos rectas intersecadas esta dado por el siguiente teorema:

TEOREMA 5.- Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula.

$$\text{tag}\,\theta=\frac{m2\quad m1}{1+m1m2},\ m1m2\ \ -\ 1$$

Donde m1 es la pendiente inicial y m2 es la pendiente final correspondiente al ángulo θ.



COROLARIO 1. La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.

COROLARIO 2. La condición necesaria y suficiente para que dos recta sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a -1.

Ejercicios

1. Halar los ángulos interiores del triangulo cuyos vértices son los puntos A(-2, 1), B(3, 4) y C(5, -2). Comprobar los resultados.

Solución:

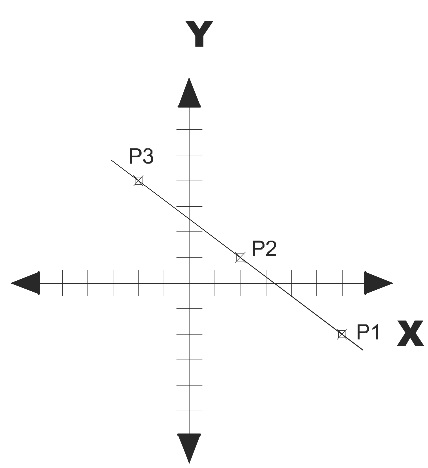
$m_1\overline{AB} = \frac{4 \quad 1}{3+2} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $m_2\overline{BC} = \frac{2 \quad 4}{5 \quad 3} = \quad 3$ $\qquad$ $m3\overline{CA} = \frac{1+2}{2 \quad 5} = \quad \frac{3}{7}$

$$tg(\angle 1) = \frac{m2 \quad m1}{1 + m1 * m2}$$

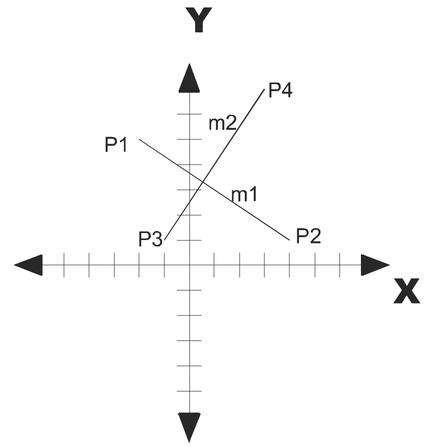
$$tg(\angle 1) = \frac{3 \quad (3/5)}{1 + \left((3/5) * (\ \ 3)\right)} = \frac{18/5}{4/5}$$

$$tg(\angle 1) = \frac{9}{2} = 4.5 = 77º\,28'$$

$$tg(\angle 2) = \frac{m3 \quad m2}{1 + m2 * m3}$$



$$tg(2)=\frac{(\ 3/7)+(3)}{1+\left((\ 3)*(\ 3/7)\right)}=\frac{18/7}{16/7}$$



$$tg(2)=\frac{9}{8}=1.125=48^{º}22'$$

$$tg(3)=\frac{m1\quad m3}{1+m1*m3}$$

$$tg(3)=\frac{(3/5)\quad(\ 3/7)}{1+\left((\ 3/7)*(3/5)\right)}=\frac{36/35}{26/35}$$

$$tg(3)=\frac{18}{13}=1.3846=54^{º}10'$$

Para la comprobación la suma de los ángulos debe ser igual a 180º.

$$tg(3)=\frac{18}{13}=1.3846=54^{º}10'$$ **l.q.d**

2. Demostrar que la recta que pasa por los puntos (-2,5) y (4,1) es perpendicular a la que pasa por los dos puntos (-1,1) y (3, 7).

Solución:

$$m\overline{P1P2}=\frac{1\quad 5}{4\quad(\ 2)}=\ \frac{2}{3}$$

$$m\overline{P3P4}=\frac{7\quad 1}{3\quad(\ 1)}=\frac{3}{2}$$

La condición de perpendicularidad:
m1*m2=-1

$$\left(\ \frac{2}{3}\right)*\left(\frac{3}{2}\right)=\ 1$$

-1=-1 l.q.d

Autoevaluación

A través del auto evaluación se pretende que usted conozca el grado de aprendizaje de los objetivos planteados en cada una de las unidades de la presente guía. Lea detenidamente los ejercicios y luego proceda a contestar con absoluta responsabilidad. Es necesario trazar gráficos en los problemas planteados.

APLICAR LA FORMULA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

1. Resuelva el siguiente problema.

   Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: P1(-5) Y P2(6); P1(3) y P2(-7)

2. Resuelva el siguiente problema.

   La distancia comprendida entre los dos puntos es 10. Si uno de los puntos es P1(2). Halle el otro extremo P2 (x2). Dos casos.

3. Resuelva el siguiente problema.

   Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19)

4. Resuelva el siguiente problema

   Los extremos de un segmento dirigido son los puntos P1 (4) y P2 (-2). Hallar la razón P2P : PP1 en el punto P (7) que divide a este segmento.

5. Resuelva el siguiente problema

   Tres vértice de un rectángulo son los puntos (2,-1), (7,-1) y (7,3).Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO DE DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

6. Resuelva el siguiente problema

   Hallar las coordenadas de un punto P(x, y) que divide al segmento determinado por P1(-1,-4) y P2 (2,5) en la relación 2/3.

7. Resuelva el siguiente problema

   Los extremos de un segmento dirigido son los puntos P1(4) y P2(-2). Hallar la razón P2P: PP1, en el punto P (7) divide a este segmento

8. Resuelva el siguiente problema

   Los extremos de un segmento son los puntos P1 (7,4) y P2 (-1,-4). Hallar la razón P1P:PP2 en que el punto P(1,-2) divide al segmento.

LA PENDIENTE DE UNA RECTA

9. Resuelva el siguiente problema

   Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (-3,2) y (7,-3).

10. Resuelva el siguiente problema

    Una recta de pendiente 3 pasa por el punto (3,2).La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

11. Resuelva el siguiente problema

    Demostrar por medio de pendientes que los puntos (9,2), (11,6),(3,5) y (1,1) son los vértices de un paralelogramo.

12. Resuelva el siguiente problema

    Demostrar que la recta que pasa por los puntos (-2,5) y (4,1) es perpendicular a la que pasa por los puntos (-1,1) y (3,7).

13. Resuelva el siguiente problema

    Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos (2,5), (7,3), (6,1) y (0,0). Comprobar los resultados.

2. 12 y -8

3. Punto de trisección: $x3 = -15$ y $x4 = -11$
   Punto medio = $x = -13$

4. Razón = $r = -3$

5. Vértices cuarto: $x4 = 2$ y $Y4 = 3$
   Área = 20 u2

DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO DE DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

6. Coordenadas: ($x = 1/5$, $y = -2/5$)

7. Razón: $r = -3$

8. Razón: $r = 3$

LA PENDIENTE DE UNA RECTA

9. Pendiente: $m = - 0.5$
   Ángulo de inclinación: $Ø = 26°24'$

10. Ordenada: $y = 5$

11. Pendientes: AB = 2; BC = 1/8; CD = 2 Y DA = 1/8

12. Pendientes: mP1P2 = -2/3, mP3P4 = 3/2

13. Pendientes: m1AB = -2/5; m2BC= 2; m3CD = 1/6 y m4DA = 5/2
    Ángulos: Ø1 = 90°; Ø2 = 85°14'; Ø3 = 126°01'; Ø4 = 58°45'.

Resumen de fórmulas

A continuación se presenta u resumen de los principales resultados obtenidos de este capitulo.

1. Longitud P1P2 de un segmento de recta dirigido, P1P2, con punto inicial P1 y punto final P2

   P1P2 coinciden con el eje X; P1 (x1,0), P2 (x2, 0). P1P2 paralelo al eje X; P1 (X1,y), P2 (X2, y), $y \neq 0$.

   P1P2 = x2 – x1

   P1P2 coinciden con el eje Y; P1 (0, y1), P2 (0, y2). P1P2 paralelo al eje X; P1 (x, y1), P2 (x, y2), $x \neq 0$.

$P1P2 = y2 - y1$

2. Distancia d entre dos puntos dados

   $P1\ (x1, y1)$ y $P2\ (x2, y2)$

   $$d = \sqrt{(x_1 \quad x_2)^2 + (y_1 \quad y_2)^2}$$

3. Coordenadas (x, y) del punto P que divide al segmento rectilíneo dirigido P1P2, con puntos extremos dados P1 (x1, x2) y P2 (x2, y2), en la razón dada r = P1P : PP2

   $$X = \frac{x1 + r\,x2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$

   $$y = \frac{y1 + r\,y2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$

4. Coordenadas (x, Y) del punto medio del segmento dirigido. P1P2 cuyos extremos dados son los puntos P1(X1, y1) y P2 (x2, y2).

   $$X = \frac{x1 + x2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y1 + y2}{2}$$

5. Pendiente m de la recta que pasa por los dos puntos dados diferentes P1 (x1, y1) y P2 (x2, y2).

   $$m = \frac{y1 - y2}{x1 - x2} \qquad ; x1 \neq x2$$

6. Ángulo formado por dos rectas con pendiente Inicial m1 y pendiente final m2

   $$Tag\ \varnothing = \frac{m2 - m1}{1 + m1m2} \qquad ; m1m2 \neq -1$$

7. Condición de paralelismo de dos rectas dadas de pendiente m1 y m2

   $m1 = m2$

8. Condición de perpendicularidad de dos rectas dadas de pendientes m1 y m2

   $m1m2 = -1$

Capítulo 2.

LA LÍNEA RECTA

2.1 DEFINICIÓN DE LÍNEA RECTA

La definición más común es aquella que dice que es la distancia mas corta entre dos puntos, sin embargo dentro de la geometría se puede definir como el lugar geométrico que une dos puntos diferentes cualesquiera P1(x1,X2) y P2(x2,y2) del lugar, el valor de la pendiente se puede calcular con la expresión:

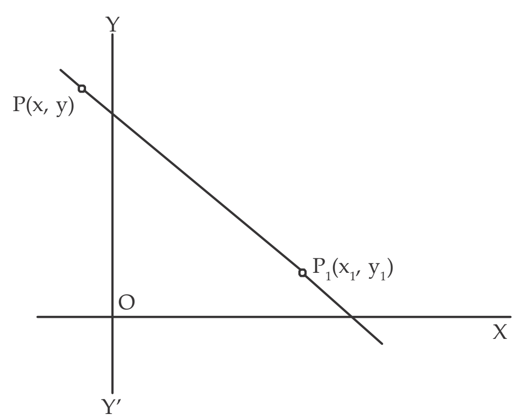
$$m = \frac{y1 \quad y2}{x1 \quad x2}, x1 \quad ^{-}x2$$

2.2 ECUACIÓN DE LA LÍNEA CON UNA PENDIENTE DADA Y PASA A TRAVÉS DE UN PUNTO

Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección. Analíticamente, la ecuación de la recta puede estar perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de uno de sus puntos y sus ángulo de inclinación (y, por tanto, su pendiente()

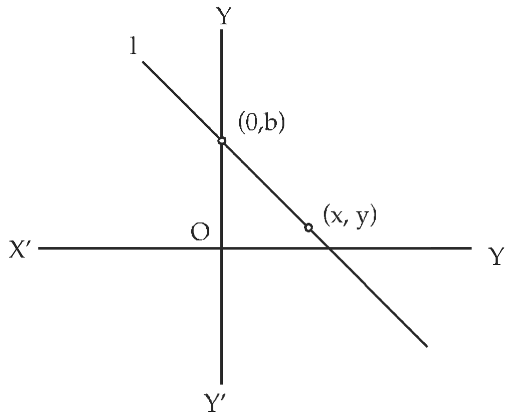
TEOREMA 1.- La recta que pasa por el punto dado P1(x1, y1) y tienen la pendiente dada m, tiene la ecuación:

$$y \quad y1 = m(x \quad x1)$$



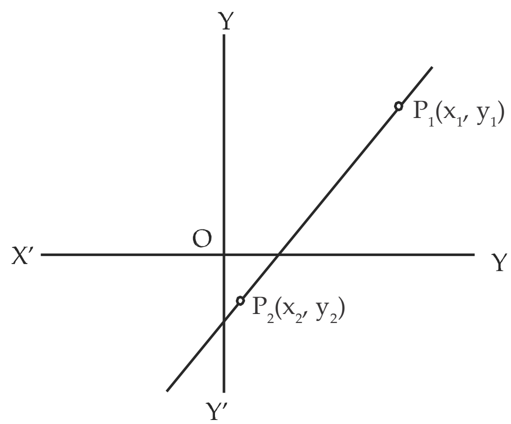
TEOREMA 2.- La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b tiene por ecuación.

$$Y = mX + b$$



TEOREMA3.- La recta que pasa por dos puntos dados P1(X1,Y1) y P2(X2,Y2) tiene por ecuación

$$Y \quad Y1 = \frac{Y1 \quad Y2}{X1 \quad X2} * \left(X \quad X1\right), \; X1 \neq X2$$



Ejercicios

1. Una recta pasa por el punto A (7,8) y es paralela ala recta C (-2,2) y D (3,-4), hallar su ecuación.

Solución

Para encontrar la ecuación de la recta requerimos de dos condiciones básicas un punto que ya lo tenemos y una pendiente que hay que encontrarla, pero si se observa la condición del problema es que es paralela a una recta por lo tanto su pendiente es la de la recta consideradas

La ecuación de una pendiente es: $m = \frac{y2 \quad y1}{x2 \quad x1}$

$$m = \frac{4 \quad 2}{3 \quad (\;2)} = \frac{6}{5}$$

Ecuación de la recta en función de una pendiente y un punto es:

$y \quad y1 = m(x \quad x1)$

Reemplazando valores tenemos

$y \quad 8 = \frac{6}{5} * (x \quad 7)$

Realizando las respectivas operaciones tenemos finalmente

$$6x + 5y - 82 = 0$$

2. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta determinada por los puntos cuyas coordenadas son :

a) P1(-7,3) y P2(8,-4);
b) A(-5,2) y B(7,8);
c) A(-3,-2) y B(4,-2);
d) A(3,3) y B(3,-4).

Solucion:

a) P1(-7, 3) y P2(8, -4)
m = (y2 - y1) / (x2 - x1)
m = (- 4 - 3)/(8+ 7)
m = -7/15

También:
m = (y2-y1) / (x2-x1)
m = (3 + 4) / (-7 - 8)
m = -7/15

Lo importante es tomar las ordenadas y las abscisas en el mismo orden.
Por ejemplo, no es correcto escribir:

m = (-4 - 3) / (-7 - 8)
m = 7/15

Ahora encontremos el ángulo de inclinación.

m = tg θ
θ = tg -1 (-7/15)
θ = 180° - 25°01'01''
θ = 154°58'59''

b) A(-5,2) y B(7,8)

m = (y2- y1) / (x2- x1)
m = (8 - 2) / (7 + 5)

m = 6 / 12
m = 1/2

m = tg θ
θ = tg-1 1/2
θ = 26° 33' 54"

c) A(-3.-2) y BC4.-2)

m = (y2- y1) / (x2- x1)
m = (-2 + 2) / (-3 - 4)
m = 0 / 7
m = 0

m = tg θ
θ = tg-1 0
θ = 0

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos A(4, 2) y B(-5,7).

Solución

Primero sacamos la pendiente m:

$$m = \frac{7 \quad 2}{5 \quad 4} = \frac{5}{9}$$

Luego, utilizamos cualquiera de los dos puntos en la fórmula, tomamos A:

$$Y \quad Y1 = m * (X \quad X1)$$

$$Y = \frac{5}{9} * \left(X \quad 4\right) + 2$$

$$9Y = \ 5X + 20 + 2$$

$$5X + 9Y \quad 38 = 0$$ l.q.d

4. Demostrar que la recta L1 que pasa por los puntos A(4,-3) y B(-2, 5) es perpendicular a la recta L2 que pasa por los puntos C(-5,9) y D(-1,12).

Solución.

Para que dos rectas sean perpendiculares el producto de sus pendientes tiene que ser igual a -1.

Entonces:

$$m(AB) = \frac{5 \quad (\quad 3)}{2 \quad 4}$$

$$m(AB) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$m(CD) = \frac{12 \quad 9}{1 \quad (\quad 5)}$$

$$m(CD) = \frac{3}{4}$$

Realizando el producto de las pendientes se tiene

$$\left(\frac{4}{3} \right) * \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{12}{12} = 1$$

Por tanto: m(AB)*m(CD) = -1, entonces las rectas son perpendiculares.

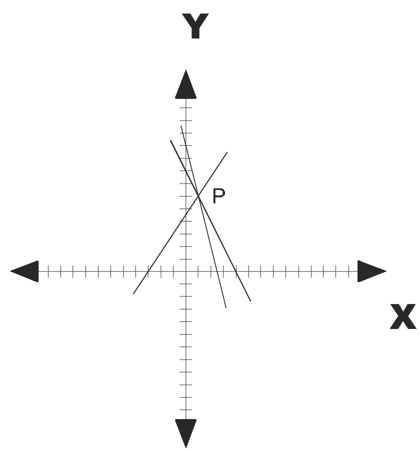
5. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x+y-8=0 y 3x-2y+9=0

Solución.

Para determinar la solución grafica tenemos que encontrar los valores para cada ecuación de recta al interceptar con los ejes, y luego determinar su punto de intersección.

Intersección de la dos recta con los ejes.

(1) $2X + Y - 8 = 0$
$X = 0 \quad Y = 8$
$Y = 0 \quad X = 4$
(2) $3X - 2Y + 9 = 0$
$X = 0 \quad Y = 9/2$
$Y = 0 \quad X = -3$



Punto de intersección.

(1) $2X + Y - 8 = 0$ *(2)
(2) $3X - 2Y + 9 = 0$

$4x + 2Y - 16 = 0$
$3X - 2Y + 9 = 0$
$7X \quad - 7 = 0$
$X = 1 \quad Y = 6$

Ecuación de la recta

$Y - Y1 = m(X - X1)$
$Y - 6 = - 4*(X - 1)$
$Y = -4X + 4 + 6$
$4X + y - 10 = 0$ l.q.d

2.3 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

La forma general de la ecuación es:

$$Ax + By + C = 0$$

En donde A o B deben ser diferentes de cero y C puede o no ser cero.

Estos coeficientes son constantes reales y arbitrarias, es decir pueden tomar cualquier valor real, siempre que A y B no sean simultáneamente nulos. Esto nos lleva a afirmar que en realidad existe solo dos constantes independientes. Si consideramos $B \neq 0$, la ecuación general se convierte en;

$$\frac{A}{B}X + \frac{B}{B}Y + \frac{C}{B} = 0,$$

Las dos constantes independientes son las razones arbitrarias A/B y C/B.
De donde la ecuación tiene la forma $Y = mX + b$

$$Y = \frac{A}{B}X \quad \frac{C}{B}$$

Donde la pendiente $m = -A/B$ y la ordenada en el origen es $-c/B$

TEOREMA 5.- Una ecuación lineal en las variables X y Y representa una recta recíprocamente.

Analíticamente, la ecuación de una recta queda perfectamente determinada por dos condiciones independientes. De los análisis se puede decir que una recta que perfectamente determinada si se conocen dos de sus puntos o uno de sus puntos y su dirección.

POSICIONES RELATIVAS A DOS RECTAS

Si se posee dos rectas cuyas ecuaciones se las puede expresar de forma general de la siguiente forma:

$Ax + By + C = 0$
$A'x + By + C' = 0$

TEOREMA 6.- Si las relaciones de dos rectas son $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'Y + C' = 0$, las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para:

a) Paralelismo $A/A' = B/B'$ o sea $A*B' = A'*B = 0$;

b) Perpendicularidad a.C. + Vd.= 0;

c) Coincidencia $A = kA'$, $B = KB'$, $C = kC'$ $(k\neq 0)$;

d) Intersección en un y solamente un punto, $A/A' \neq B/B'$ o sea $AB'-A'B \neq 0$

Ejercicio

1. Hallar el ángulo formado por las rectas 4 -9y +11 = 0 y 3x + 2y -7 = 0

Solución

La fórmula para determinar el ángulo entre dos rectas se la encuentra conociendo el valor de las pendientes de cada una de ellas, la pendiente de cada una de ellas se las determina dividiendo el coeficiente -A/B, por lo tanto

m1 = -4/(-9)
m1 = 4/9

m2 = -3/2
El ángulo entre dos rectas esta dado por:

$$tag\theta = \frac{m2 * m1}{1 + m1 * m2}$$

$$\theta = tag^{-1}\left[\frac{(-3/2)*(4/9)}{1+((4/9)*(-3/2))}\right]$$

$$\theta = tag^{-1}(5.833)$$

θ = 80.27 °

2. Determinar el valor k para que la recta k2X + (k + 1)Y + 3 = 0, sea perpendicular a la recta 3X – 2y – 11 = 0.

Condiciones de perpendicularidad
AA’ – BB’ = 0
3k2 – 2(k + 1) = 0
3k2 - 2k – 2 = 0.

Resolviendo la ecuación.

$$k = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*(3*-2)}}{2*3}$$

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

3. Hallar la ecuación de la recta determinando los coeficientes de la forma general, que es perpendicular a la recta 3X – 4y + 11 = 0 y pasa por el punto (-1,-3).

Solución

En la recta dada: 3X – 4y + 11 = 0

$A = 3, \quad B = 4$

Pendiente: $m1 = -A/B = -3/(-4)$
$m1 = ¾$

Como, la recta es perpendicular, su pendiente es: $m = -4/3$ o sea que:
$A = -4$ y $B = 3$

Aplicamos la formula. $Y = m * \left(X \quad X1\right) + Y1$

$$Y = \frac{4}{3}(X \quad (\quad 1)) + (\quad 3)$$

$$Y = \frac{4}{3}(X + 1) \quad 3$$

$$4X + 3Y + 13 = 0$$

4. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes X y Y, es decir sus intersecciones son 3 y -5 respectivamente.

Solución:

Sea la recta $Ax * BY * C = 0$

Si $Y = 0$; $x = - C/A = 3$; $C = -3A$

$X = 0$; $y = - C/B = 5$; $C = 5B$

De (1) y (2) se deduce que: -3ª = 5B ; B = - 3/5 A

Sustituyendo (1) y (3) en $Ax + By + C = 0$

$$Ax - 3/5Ay - 3A = 0$$

$$A (5x - 3y - 15) = 0$$

$A \neq 0$

$5X - 3y - 15 = 0$

5. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4X - 9Y + 11 = 0$ y $3X + 2Y - 7 = 0$.

Solución.

Pendientes de las rectas dadas:

En (1)	$4X - 9Y + 11 = 0$	
$m = 4/9$	$A = 4$	$B = -9$
En (1)	$3X + 2Y - 7 = 0$	
$m = -3/2$	$A' = 3$	$B' = 2$

Primer método.

Para calcular el ángulo agudo podemos aplicar la fórmula de los ángulos suplementarios y no las pendientes:

$$Tag\theta = \frac{A'B \quad AB'}{AA'+BB'} = \frac{(3)*(\ 9) \quad (4)*(2)}{(4)*(3)+(\ 9)*(2)}$$

$$tag\theta = \frac{27 \quad 8}{12 \quad 18} = \frac{35}{6}$$

$$\theta = tag^{\ 1}\left(5.8333)\right) = 80º16'$$

Segundo método.

$$tag\theta = \frac{m2 \quad m1}{1+m1m2} = \frac{(4/9) \quad (\ 3/2)}{1+\left[(4/9)*(\ 3/2)\right]}$$

$$\theta = tag^{\ 1}\left(\frac{33/18}{6/18}\right) = tag^{\ 1}(35/6)$$

$$\theta = tag^{\ 1}(5.8333) = 80º16'$$

2.4 FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

TEOREMA 7.- La forma normal de la ecuación de una recta es:

$X \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0$

En donde p es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta y w es el ángulo positivo $< 360º$ medio a partir de la parte positiva del eje X a la normal.

Así mismo podemos reducir la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal.

TEOREMA 8. La forma general de la ecuación de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede reducirse a la forma normal,

$X \cos\theta + Y sen\theta \quad p = 0$

Dividiendo cada término de la ecuación general por $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, en donde el signo que precede al radical r se escoge como sigue:

Si $C \neq 0$, r es de signo contrario a C.
Si $C = 0$ y $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo.
Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo.

Entre las aplicaciones que se le puede dar es la de encontrar la distancia entre un punto dado y una recta según el siguiente teorema.

TEOREMA 9.- La distancia d de una recta Ax + By + C = 0 a un punto dado P1(x1, y1) puede obtenerse sustituyendo las coordenadas del punto en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de la recta. Su valor está dado por

$$d = \frac{\left|Ax1 + By1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEOREMA 10.- L distancia dirigida d de la recta dada Ax + By + C = 0 al punto dado p1(X1, Y1) se obtiene de la fórmula.

$$d = \frac{Ax1 + By1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 8.
Si la recta dada no pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto P1 y el origen estén en lados opuestos o el mismo lado de la recta.

Si la recta dada pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto P1 esté arriba o debajo de la recta.

Ejercicios

1. Hallar la distancia de la recta 4x – 5y + 10 =0 al punto P(2, -3).

Solución.

Reemplazamos los valores en la ecuación:

$$d = \frac{\left|Ax1 + By1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{\left|(4*2)\quad(5*(\ \ 3)) + 10\right|}{\sqrt{4^2 + (\ \ 5)^2}} = \frac{\left|8 + 15 + 10\right|}{\sqrt{16 + 25}}$$

$$d = \frac{33}{\sqrt{41}} = \frac{33\sqrt{41}}{41}$$

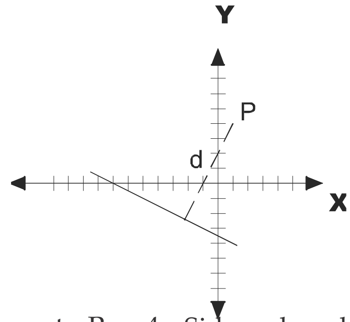
2. Hallar la distancia dirigida de la recta x+ 2y + 7 = 0 al punto P(1, 4)

Solución.

Reemplazamos los valores en la ecuación:

$$d = \frac{Ax1 + By1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{(1*1)+(2*4)+7}{\pm\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1+8+7}{\pm\sqrt{1+4}}$$



$$d = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

3. La distancia de la recta 4x – 3y + 1 = 0 al punto P es 4. Si la ordenada de p es 3, hállese su abscisa. (Dos soluciones)

Solución.

$$4 = \frac{4*X \quad 3*(3)+1}{\pm\sqrt{16+9}} = \frac{4X \quad 9+1}{\pm\sqrt{25}}$$

$$4 = \frac{4X \quad 8}{\pm 5}$$

Primera solución

$$4 = \frac{4X \quad 8}{5}; \qquad 20 = 4X \quad 8; \qquad X = 7$$

Segunda solución

$$4 = -\frac{4X \quad 8}{5}; \qquad 20 = 4X \quad 8; \qquad X = -3$$

2.5 ECUACIÓN QUE PASA POR DOS PUNTOS, EN FORMA DE DETERMINANTE

TEOREMA 11. La ecuación de la recta que pasador los puntos P1(x1,y1) y P2(x2,y2) puesta en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios

1. Una recta pasa por la intersección de las rectas 7x - 2y = 0 y 4x - y -1 = 0 y es perpendicular a la recta 3x + 8y -19 = 0. Halle su ecuación.

Solución

Primer Método.

El primer punto de la recta es la intersección de las dos rectas, por lo tanto se igualan sus ecuaciones y se encuentra el punto de intersección

De la ecuación (1)
$y = 7x/2$

Si reemplazando en la ecuación (2) tenemos

$4x - 7x/2 - 1 = 0$,

De donde $X = 2$
Como $y = 7x/2$
Entonces $Y = 7$

El primer punto es (2, 7)

La otra condición para determinar la ecuación de una recta es su pendiente, la que de la segunda condición se encuentra que su pendiente es perpendicular a la recta $3x + 8y - 19 = 0$.

$m = -3/8$

Por tanto la pendiente perpendicular a la ecuación $3x + 8y - 19 = 0$ es $m1 = -8/3$

La recta por lo tanto tendrá una ecuación de $Ax + By + C = 0$ y la pendiente es igual $-A/B = 8/3$

entonces $A = 8$ y $B = -3$.

El valor de C se lo obtiene remplazando en la ecuación $8*2 + (-3)*7 + C = 0$ entonces $C = 5$

Finalmente la recta tendrá una ecuación:

$8x - 3y + 5 = 0$

Segundo Método.

Aplicando la ecuación de la familia de de líneas rectas

(1) $7x - 2y + k(4x - y - 1) = 0$
$7x - 2y + 4kx - ky - k = 0$
$(7 + 4k)x - (2+k)y - k = 0$

(2) $$m = \frac{7+4k}{(2+k)} = \frac{7+4k}{(2+k)}$$

(3) La pendiente de la recta $3x + 8y - 19 = 0$ es $m = -3/8$
Por tanto la pendiente perpendicular a dicha recta es $m1 = 8/3$

(3) Igualando con (2) tenemos

$\frac{8}{3} = \frac{7+4k}{(2+k)}$; $16 + 8k = 21 + 12k$

$k = -5/4$

(4) Reemplazando en (1)

$$7x \quad 2y \quad \frac{5}{4}\left(4x \quad y \quad 1\right) = 0$$

$$28x \quad 8y \quad 20x + 5y + 5 = 0$$

$$8x \quad 3y + 5 = 0$$ **l.q.d**

2. Encontrar el ángulo que forman, la recta L1 que pasa por los puntos A(-1,-2) y B(4,6) con la recta L2 que pasa por los puntos C(7,-2) y D(l,7).

Solución.

La pendiente de la recta AB, la simbolizamos así mAB; y, la pendiente de la recta CD, la simbolizamos con mCD.

Luego:

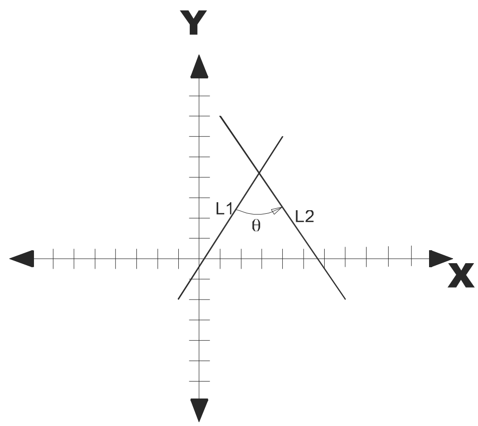
$$mAB = \frac{(y2\text{-}y1)}{(x2\text{-}x1)} = \frac{6+2}{4+1}$$

mAB = 8/5

$$mCD = \frac{(y2\text{-}y1)}{(x2\text{-}x1)} = \frac{7+2}{\cancel{1-7}}$$

mCD = (9 / -6)

mCD = -3/2



Si se gráfica, orientando el ángulo en sentido positivo observaremos que la recta AB, o sea L1 es la recta inicial y la recta CD, ósea L2 es la recta final.

Por tanto:
mCD = m2 = - 3/2 y
mAB = m1 = 8/5

Aplicando la fórmula para determinar el ángulo formado por dos rectas, se tiene:

$$Tag(= \frac{m2 \quad m1}{1 + m1m2}$$

m2 = -3/2 y
m1 = 8/5

$$\text{Tag}(= \frac{(\;\; 3/2 \quad 8/5)}{(1+(\;\; 3/2)*(8/5))}$$

Tag θ = 31/14

De donde

θ = 65° 41' 44''

3. Los vértices de un triangulo son los puntos A(3,7), B(-2,l) y C(10,2). Determinar los ángulos interiores.

Solución.

Se procede de la siguiente manera:

a. Calculamos las pendientes de cada uno de los lados del triangulo.

Esto es:

$$mAB = \frac{(y2\text{-}y1)}{(x2\text{-}x1)} = \frac{1\text{-}7}{2 \quad 3}$$

mAB = -6 / -5
mAB = 6/5

$$mBC = \frac{(y2\text{-}y1)}{(x2\text{-}x1)} = \frac{1\text{-}2}{2 \quad 10}$$

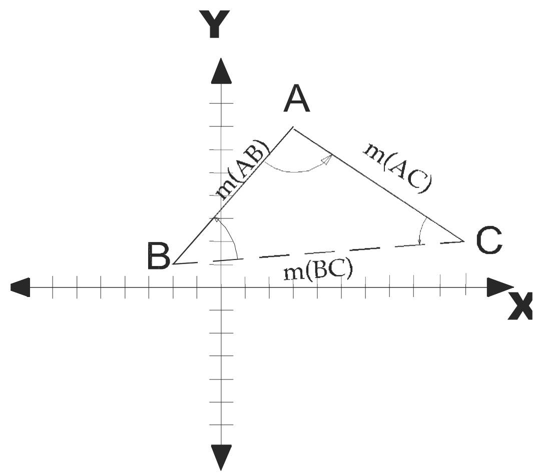
mBC = -1 / -12
mBC = 1/12

$$mAC = \frac{(y2\text{-}y1)}{(x2\text{-}x1)} = \frac{7\text{-}2}{3\text{-}10}$$

mBC = 5 / -7
mBC = - 5/7

b. Orientamos cada una de los ángulos interiores del triangulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, esto es en sentido positivo.

Al dibujar se puede notar que al orientar los ángulos interiores del triangulo, la flecha comienza en un lado y termina en otro. Entonces en el lado que se inicia la flecha tenemos la pendiente de la recta inicial y en el lado en que termina la flecha la pendiente de la recta final. Por ejemplo el ángulo A esta formado por los lados AB y AC. Al orientar el ángulo A, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, vemos que la flecha se inicia en el lado AB y termina en el lado AC. Entonces la pendiente inicial m1 = mAB y la pendiente final m2 = mAC. Para el ángulo B, m1 = mBC y m2 = mAB. Para el ángulo C, m1 = mAC y m2 = mBC.



c. Aplicamos la formula para determinar el ángulo formado por dos rectas.

Es decir;

$$\text{Tag}(A) = \frac{m2 \quad m1}{1 + m1m2}$$

m1 = -5/7
m2 = 6/5

$$\text{Tag}(A) = \frac{5/7 \quad 6/5}{1 + ((\quad 5/7)*(6/5))}$$

Tag A = -67/5

De donde:
A = 94°16′4″

$$\text{Tag}(B) = \frac{m2 \quad m1}{1 + m1m2}$$

m2 = 6/5
m1 = 1/12

$$\text{Tag}(B) = \frac{6/5 \quad 1/12}{1 + ((6/5)*(1/12))}$$

Tag B = 67/66

De donde
B = 45° 25′ 51 ″

tg C = (m2 - m1)/(1 + m2*m1)
m2 = 1/12
m1 = -5/7

$$\text{Tag}(C) = \frac{1/12 + 5/7}{1 + ((\ \ 5/7) * (1/12))}$$

Tag C = 67/79

De donde
C = 40° 18′ 5 “

COMPROBACIÓN La suma de los ángulos interiores de un triangulo es igual a 180.

Es decir: A + B + C = 180°, sumando los valores obtenidos se tiene:

94°16′ 4″+ 45° 25′ 51 “ + 40° 18′ 5 “ = 180°
180º = 180º

4. Los vértices de un triangulo son los puntos A(-1,-6), B(5,6) y C(-3,-l). Encontrar:

a) Las ecuaciones da las alturas y su punto de intersección.
b) Las ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección; y,
c) ecuaciones de las medianas y su punto de intersección.

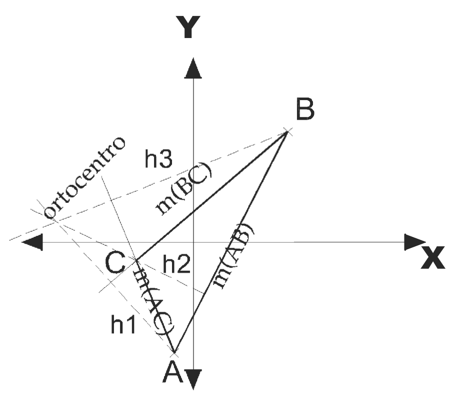
Solución.

a) Ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.

Altura en un triangulo es la perpendicular trazada desde el vértice al lado opuesto o a su prolongación. El punto de intersección de las alturas de un triangulo se llama Ortocentro.

Pendiente de los lados
mAB = 2
mBC = 7/8 y
mAC = -5/2

Ecuaciones de las alturas.
Ecuación de h1
A(-l,-6), m = -8/7, por ser h1 perpendicular a la prolongación del lado BC.



Aplicando punto-pendiente, tenemos:

$$y \quad (\;\; 6) = \;\; \frac{8}{7}(x+1)$$

7y + 42 = - 8x - 8.

De donde:
8x + 7y + 50 = 0 (1)

Ecuación de h2.
B(5,6), m = 2/5 por ser h2 perpendicular a la prolongación del lado AC. Aplicando punto-pendiente, tenemos:

$$y \quad 6 = \frac{2}{5}x \quad 5$$

5y - 30 = 2x - 10

De donde:
2x - 5y + 20 = 0 (2)

Ecuación de h3.
C(-3,-l), m = - 1/2 por ser h3 perpendicular al lado AB aplicando punto-pendiente, tenemos:

$$y + 1 = \;\; \frac{1}{2}(x+3)$$

2y + 2 = -x -3.

De donde
x + 2y + 5 = 0 (3)

Punto de intersección. Ortocentro.
Para encontrar el Ortocentro, se resuelve el sistema formado por dos de las tres ecuaciones de alturas. Por ejemplo, resolviendo el sistema

2x - 5y + 20 = 0

x + 2y + 5 = 0

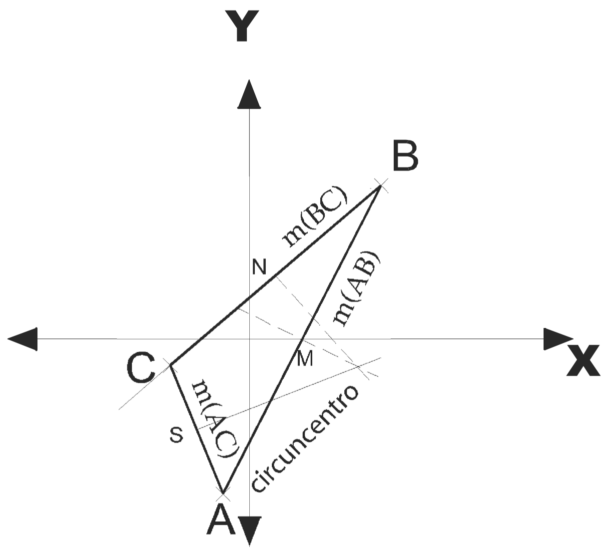
Se tiene:
x = - 65/9 ;
y = 10/9

El ortocentro tiene coordenadas (-65/9, 10/9).

b) Ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección. Mediatriz, es la perpendicular levantada en el punto medio de un segmento. En un triangulo las mediatrices encuentran en un punto llamado Circuncentro.

Pendientes de los lados.
A(-1,-6), B(5,6) y C(-3,-l)

mAB = 2;
mBC = 7/8
mAC = -5/2



Puntos Medios.

Lado AB.	M(2, 0)
Lado BC	N(1, 5/2)
Lado AC	S(-2, -7/2)

Ecuaciones de las mediatrices.

Ecuación de m1

M(2,0) ; m = - 1/2 por ser m1 perpendicular al lado AB. Aplicando punto -pendiente, tenemos:

$$y \quad 0 = \frac{1}{2}(x \quad 2)$$

2y - 0 = - x + 2.

De donde:
x+2y-2=0 (1).

Ecuación de m2

N(1, 5/2) ; m = - 8/7
Por ser perpendicular al lado BC. Aplicando punto-pendiente, tenemos:

$$y \quad \frac{5}{2} = \frac{8}{7}(x \quad 1)$$

14y - 35 = -16x + 16

De donde
16x + 14 y - 51 = 0 (2)

Ecuación de m3

S(-2,-7/2); m = 2/5 por ser perpendicular al lado AC. Aplicando punto- pendiente, tenemos:

$$y + \frac{7}{2} = \frac{2}{5}(x + 2)$$

$10y + 35 = 4x + 8$

De donde:

$4x - 10y - 27 = 0$ (3)

Punto de intersección. Circuncentro.

Para encontrar el circuncentro se resuelve el sistema formado por dos de las tres ecuaciones obtenidas. Por ejemplo, resolviendo el sistema:

$x + 2y - 2 = 0$
$4x - 10y - 27 = 0$

Se tiene:
$x = 37/9$;
$y = - 19/18$

Las coordenadas del circuncentro son (37/9, -19/18)

c) Ecuaciones de las Medianas y su punto de intersección. Mediana, en un triangulo es el segmento de recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto donde concurren las tres medianas del triangulo se llama Baricentro.

* Puntos medios.

Lado AB.	M(2, 0)
Lado BC	N(1, 5/2)
Lado AC	S(-2, -7/2)

Ecuación de las Medianas.

Ecuación de CM

C(-3, -1), M(2,0).
Aplicando la ecuación d« la recta que pasa por dos puntos, tenemos:

$$y \quad y1 = \frac{y2 \quad y1}{x2 \quad x1}(x \quad x1)$$

$$y + 1 = \frac{0 + 1}{2 + 3}(x + 3)$$

$y + 1 = 1/5\ (x + 3)$
$5y + 5 = x + 3.$

De donde:
x - 5y - 2 = 0 (1)

Ecuación de AN.

A(-1 -6), N(1, 5/2). Aplicando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos

$$y \quad y1 = \frac{y2 \quad y1}{x2 \quad x1}(x \quad x1)$$

$$y + 6 = \frac{5/2 + 6}{1 + 1}(x + 1)$$

y + 6 = 17/4 (x + 1)
4y + 24 = 17x + 17.

De donde:

17x - 4y - 7 = 0 (2)

Ecuación de BS.

B(5,6), S(-2, -7/2).
Aplicando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos;

$$y \quad y1 = \frac{y2 \quad y1}{x2 \quad x1}(x \quad x1)$$

$$y \quad 6 = \frac{7/2 + 6}{2 \quad 5}(x \quad 5)$$

y - 6 = 19/14 (x - 5)
14y - 84 = 19x - 95.

De donde
19x - 14y - 11 = 0 (3)

Punto de Intersección. Baricentro.

El Baricentro, se determina resolviendo el sistema formado por dos de las tres ecuaciones obtenidas.

Por ejemplo, resolviendo el sistema:
x - 5y - 2 = 0
17x - 4y - 7 = 0

Se tiene
x = 1/3;
y = - 1/3

Las coordenadas del baricentro son (1/3, -1/3).

Una manera sencilla de obtener las coordenadas del Baricentro es sumar las abscisas y las ordenadas separadamente y dividir por tres. Es decir

$x = (x1 + x2 + x3) / 3$
$x = (-1 + 5 -3) / 3$
$x = 1/3$

$y = (y1 + y2 + y3) / 3$
$y = (-6 + 6 -1) / 3$
$y = - 1/3$

Al Baricentro también se lo conoce con el nombre de centro de gravedad del triangulo.

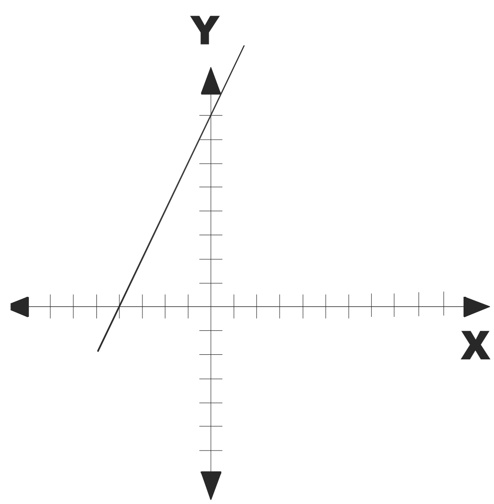
5. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx – y + 8 = 0$ que le corresponda o pase por el punto (-2, 4). Hallar la ecuación de la recta.

Solución

Primero reemplazamos el valor de las coordenadas del punto P en al ecuación.

$k(-2) – 4 + 8 = 0$
$-2k + 4 = 0$
$k = 2$

Ecuación de la recta
$2x – y + 8 = 0$



Autoevaluación

A través del auto evaluación se pretende que usted conozca el grado de dominio de los objetivos planteados en cada una de las unidades de la presente guía. Lea detenidamente los ejercicios y luego proceda a contestar con absoluta responsabilidad. Es necesario trazar gráficos en los problemas planteados. Recuerde que si usted no logra dominar los objetivos de este modulo, no puede continuar con el modulo siguiente.

LA RECTA QUE PASA POR EL PUNTO DADO P1(X1,Y1)Y TIENE LA PENDIENTE DADA (m).

1. Resuelva el siguiente problema

   Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 5) y tiene de pendiente 2.

2. Resuelva el siguiente problema

   Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-6, -3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

3. Teorema

   La recta cuya pendiente es (m) y cuya ordenada en el origen es (b) tiene por ecuación:

4. Resuelva el siguiente problema.

   Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje Y es -2.

5. Teorema

   La recta cuyas intersecciones son los ejes X y Y son $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tiene por ecuación:

6. Resuelva el siguiente problema.

   Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son 2 y -3 respectivamente.

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

7. La forma general de la ecuación es:

8. Resuelva el siguiente problema.

Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto P (-2, 4) y tiene una pendiente igual a -3.

LA FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA ES

9. $X\cos W + Y\text{seno } W - p = 0$

Capítulo 3.

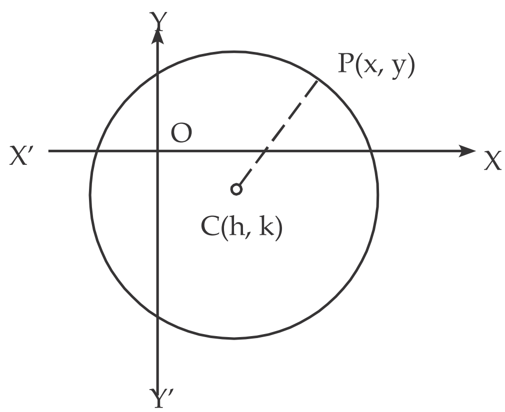
ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

3.1 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA. FORMA ORDINARIA

La circunferencia se denomina el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

TEOREMA 1.- La circunferencia cuyo centro es el punto (h, K) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación.

$$(x \quad h)^2 + (y \quad k)^2 = r^2$$



COLORARIO .Si la circunferencia tiene centro en el origen y radio r tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(7, -6) y que pasa por el punto A(2,2).

   Solución

   Primero determinamos el valor del radio

   $r = \sqrt{(7 \quad 2)^2 + (\quad 6 \quad 2)^2} = \sqrt{89}$

   La ecuación de la circunferencia es

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
$(X - 7)^2 + (y + 6)^2 = 89$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre el eje X y que pasa por los puntos A(1,3) y B (4,6)

Solución

Para obtener la ecuación de la circunferencia se necesita encontrar su centro y el radio.

De acuerdo al problema planteado el centro esta ubicado en el eje x la segunda ecuación indica que tiene que pasar por dos puntos, por lo tanto la distancia entre el centro y cualquiera de los dos puntos es igual con lo que encontramos su radio.

Si consideramos al centro con coordenadas (x, 0), la distancia del punto uno al centro tenemos

Distancia de punto A al centro (sobre el eje x)

$$d1 = \sqrt{(1 \quad x)^2 + (3 \quad 0)^2}$$

$$d1 = \sqrt{\left(1 \quad x\right)^2 + 9}$$

Distancia del punto B al centro (sobre el eje x)

$$d2 = \sqrt{(4 \quad x)^2 + (6 \quad 0)^2}$$

$$d1 = \sqrt{\left(4 \quad x\right)^2 + .36}$$

Igualando las dos distancias tenemos

$$d1 = \sqrt{\left(1 \quad x\right)^2 + 9} = d1 = \sqrt{\left(4 \quad x\right)^2 + .36}$$

Elevando al cuadrado ambos términos

$(1-x)^2 + 9 = (4 --x)^2 + 36$

Factorizando

$1 - 2x + x2 + 9 = 16 - 8x + x2 + 36$
$6x = 42$

Simplificando

$x = 7$